УДК 656.073 DOI: 10.31799/2077-5687-2021-2-52-57

АЛГОРИТМ ОЦЕНИВАНИЯ ПАРАМЕТРОВ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Я. Я. Эглит[1], К. Я. Эглите[2], А. Р. Балыбин[1], А. С. Грамацкий[1]
[1]Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова
[2]Санкт-Петербургский институт экономики и управления

В статье представлен алгоритм оценивания параметров нелинейных систем, что является одной из основных задач классического статистического анализа. Параметрическая оценка коэффициентов моделей, которые основаны на экспериментальных данных, является основой оценивания параметров.

Ключевые слова: алгоритм оценивания, нелинейные системы, статистический анализ, нелинейная функция, эксперимент, модели.

Для цитирования:
Эглит Я. Я., Эглите К. Я., Балыбин А. Р., Грамацкий А. С. Алгоритм оценивания параметров нелинейных систем // Системный анализ и логистика: журнал.: выпуск №2(28), ISSN 2077-5678. – СПб.: ГУАП., 2021 – с. 52-57. РИНЦ. DOI: 10.31799/2077-5687-2021-2-52-57.

ALGORITHM FOR ESTIMATING PARAMETERS OF THE NONLINEAR SYSTEM

Y. Y. Eglit[1], K. Y. Eglite[2], A. R. Balybin [1], A. S. Gramatskiy[1]
[1]Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
[2]Saint-Prtersburg Institute of economics and management

The article presents an algorithm for estimating the parameters of nonlinear systems, which is one of the main tasks of classical statistical analysis. The parametric estimation of the coefficients of models that are based on experimental data is the basis. The basis for evaluating parameters.

Key words: estimation algorithm, nonlinear systems, statistical analysis, nonlinear function, experiment, models.

For citation:
Eglit Y. Y., Eglite K. Y., Balybin A. R., Gramatskiy A. S. Algorithm for estimating parameters of the nonlinear system// System analysis and logistics.: №2(28), ISSN 2077-5687. – Russia, Saint-Petersburg.: SUAI., 2021 – p. 52-57. DOI: 10.31799/2077-5687-2021-2-52-57.

Введение

Параметрическая оценка коэффициентов моделей, основанная на экспериментальных данных, представляется одной из основных задач классического статистического анализа. В ходе идентификации необходимо подбирать такие значения параметров, при которых обеспечивается наилучшее приближение расчётных данных к эксперименту. Если критерий качества предполагает собой линейную функцию отклонений аргументов модели от эксперимента и сумму абсолютных значений отклонений, то минимизация критерия приводит к решению задачи линейного программирования. Может потребоваться минимизировать сумму квадратов отклонений во время процесса моделирования, тогда необходимо решать задачу квадратного программирования. Оценка коэффициентов модели для переопределённой системы уравнений может быть произведена с помощью метода наилучших квадратов, либо в зависимости от системы ограничений его модификации и использования совместно с методом множителей Лагранжа.

Модели нелинейной регрессии способствуют значительному повышению точности «притирки», тем не менее, при этом процесс оценки параметров основываются на решении системы нелинейных уравнений, составляющих ограничения, к тому же содержат нелинейный критерий качества.

Алгоритм оценивания

Довольно часто в ходе распознавания динамических систем попадается нелинейная функция вида

$$z(t) = v \cdot e^{\beta t} \quad (1)$$

где z(*t*)– выходная координата, *t*– время, *v* и β– постоянные коэффициенты, которые подлежат оценке по экспериментальным данным.

Для того, чтобы получить оценку *v* и β по измерениям $z(t_i)$ в момент времени t_i $(i$ - $1, \ldots, n)$ можно использовать p-норму:

$$\left| ve^{\beta(t_i)} - z(t_i) \right| = min \quad (2)$$

В экономических системах требуется оценивать коэффициенты *v* и *r* функции

$$z(x) = \frac{v \cdot x}{r + x} \quad (3)$$

и, следовательно, минимизировать норму [1]:

$$\left| \frac{v \cdot x_i}{r + x_i} - z_i \right|_p = \min \quad (4)$$

Принимая *p* = 2, т.е., вводя эвклидову норму, в этом случае для зависимостей (2) и (4) нелинейную задачу оценивания можно подвести к линейной путём простых преобразований.
В первом случае

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln v + \beta t_i - \ln z(t_i))^2 = \min, \quad (5)$$

а во втором

$$\sum_{i=1}^{n} (\frac{r}{v}\frac{1}{x_i} + \frac{1}{v} - \frac{1}{z_i})^2 = \sum_{i=1}^{n} (\frac{r}{v} w_i + \frac{1}{v} - h_i)^2 = \min \quad (6)$$

где $w_i = \frac{1}{x_i}$ и $h_i = \frac{1}{z_i}$ – введённые новые переменные.

Всё же заметим, что преобразования (5) и (6) дают возможность получить минимумы суммы квадратов логарифмов остатков, а не самих остатков, что не гарантирует минимум нормы для (1) и (2).

Рассмотрим пример. Допустим, то, что коэффициенты экспоненциальной функции (1) обязаны оцениваться согласно экспериментальным данным

Таблица 1– Экспериментальные данные

t_i	0	1	2
$z(t_i)$	1	2	6

Оценка с использованием метода наименьших квадратов функции [2]

$$\ln z(t_i) = \ln v + \beta t_i$$

приводит к следующему результату: v=0,93466 и β=0,89588.

Применение нелинейной оценки с помощью предоставленного в этой работе алгоритма даёт возможность получить: *v*=0,78044 и β=1,01742.

В первом случае эвклидова норма равна 0,24174, а во втором 0,07423.

В случае если есть возможность подвести нелинейную задачу к линейной, то процесс вычисления значительно упрощается. Но, следует помнить, то, что нелинейная оценка самой функции способна обеспечить лучший итог, что, связан с более сложными вычислениями.

Рассмотрим алгоритм оценки коэффициентов нелинейной регрессионной модели, который в свою очередь базируется на методе наименьших квадратов. Допустим, с помощью нелинейной функции

$$z = r \cdot t \cdot \exp(jt) \tag{7}$$

где rи j– постоянные коэффициенты, t– время, моделируется технологический процесс. В моменты времени t_i($i = 1, \ldots, n$) будут получены значения выхода z_i. Необходимо оценить параметры rи cпо экспериментальным данным.

Пусть вектор d_i устанавливает разность между левой и правой частями уравнения (7) в моменты t_i. Для положительныхd_iможно составить систему неравенств вида

$$\begin{gathered} z_i - r \cdot t_i \cdot \exp(j \cdot t_i) + a_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \\ -z_i - r \cdot t_i \cdot \exp(j \cdot t_i) + a_i \geq 0, i = 1, \ldots, n, \\ a_i \geq 0, i = 1, \ldots, n \end{gathered} \tag{8}$$

где n– число экспериментальных точек, большее числа оцениваемых параметров.

Введём критерий качества

$$w = \sum a^2{}_i \tag{9}$$

В таком случае алгоритм оценки коэффициентов r и j заключается в минимизации (9) при соблюдении системы ограничений в форме неравенств (8). Это является задачей квадратичного программирования, для решения которой могут быть использованы вычислительные среды. А именно, в среде MatLAB можно воспользоваться функцией «constr», которая предназначена для минимизации нелинейных функций с различными ограничениями (в том числе – ограничениями-равенствами) [3].

Для расчётов согласно алгоритму (8) и (9) составим два файла: основной и файл-функцию.

```
% Основной файл.
% Нелинейная регрессия.
% Определение коэффициентов ‘r’ и ‘j’ функции
% z=r*t*exp(j*t)
options(13)=8;
```

```
x0=ones(6,1).*0.1;
vlb=[];
vub=[];
x=constr(‘sahop94’,x0,options,vlb,vub);
[x(1) x(2)]’
% Основной файл.
% Нелинейная регрессия.
% Определение параметров нелинейной модели, приведённой
% в основном файле.
function [h,m]=sahop94(x);
% Решение задачи:
h=[x(3) x(4) x(5) x(6)]* [x(3) x(4) x(5) x(6)]’;
m(1)=-176.1720+x(1)*1.0*exp(x(2)*1.0)+x(3);
m(2)=-248.2927+x(1)*2.0‘exp(x(2)*2.0)+x(4);
m(3)=-262.4533+x(1)*3.0*exp(x(2)*3 0)+x(5);
m(4)=-246.5970+x(1)*4.0*exp(x(2)*4.0)+x(6);
m(5)=176.1720-x(1)*1.0*exp(x(2)*1.0)+x(3);
m(6)=248.2927-x(1)*2.0’*exp(x(2)*2.0)+x(4);
m(7)=262.4533-x(1)*3.0*exp(x(2)*3.0)+x(5);
m(8)=246.5970-x(1)*4.0*exp(x(2)*4.0)+x(6);
```

В основном файле имеется опция «options(13)=k», благодаря которой файле-функции первые k ограничений задаются в виде ограничений-равенств. В соответствии с алгоритмом (8), (9), для решаемой задачи k=8.

Оценку коэффициентов осуществляется согласно измерениям координат в четырёх кочках (n=4), приведённым в таблице:

Таблица 2 – Измерения координат

t_i	1	2	3	4
z_i	176.1720	248.2927	262.4533	246.5970

Поэтому нулевое приближение зададим вектором, состоящим из шести элементов: x(1)=r, x(2)=j, x(3)=a_1, x(4)=a_2, x(5)=a_3, x(6)=a_4. Предположим, итерационный процесс начинается с режима

x0=[x(1) x(2) ... x(6)]’ = [0.1 0.1 ... 0.1]’ = ones(6,1).*0.1,

где «‘» является знаком транспонирования вектора. Мы не будем ограничивать процедуру вычислений и по этой причине vlb=[] и vub=[] зададим “пустыми” векторами. В основном файле при записи “constr’ находится файл-функция “sahop94”, которая состоит из критерия качества (8) и ограничений-равенств вида (8). Обращение к этой функции осуществляется из основного файла, в соответствии с процедурой минимизации.

Файл-функция состоит из определения функции, где h– критерий качества и m– система ограничений, соответствующая неравенствам (8). В них введены данные измерений из вышеприведённой таблицы.

Вычисления, которые были произведены с помощью приведённых файлов, дали возможность получить оценки элементов вектора x:

x = [250.0000 -0.3500 0 0 0 0]

Коэффициенты r и c модели совпадают с оценочными значениями:

$$R = 250; j = -0.350$$

Заключение

Был разработан алгоритм проверки качества модели посредством нахождения числа обусловленности матрицы. Для исполнения алгоритма оценивания параметров нелинейных систем применяется среда MatLAB с применением функции «constr». В случае наличия в измерениях шума с нормальным распределением оценка с помощью предлагаемого алгоритма даёт возможность получить минимум эвклидовой нормы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Эглите К.Я.* Оптимизация модернизации и реконструкции объектов перегрузочного комплекса // Методы прикладной математики в транспортных системах: вып.3.-СПб.2014.-с. 183-188.
2. *Эглит Я. Я.,* Эглите К.Я. Методы принятия оптимальных управленческих решений. Новороссийск, Эксплуатация морского транспорта: №4(97), 2021, 0,4 с.
3. *Arviel M.* Geometric Programming Issue. Part 2. // Journal of Optimization Theory and Applications. -2014. -vol. 26. -№ 2.-p.76-81.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Эглит Ян Янович –
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Управления транспортными системами ГУМРФ им. адм. С.О. Макарова
ФГБОУ ВО Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова
198035, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
E-mail: eglit34@mail.ru

Эглите Катрина Яновна –
д. э. н., профессор кафедры логистики Санкт – Петербургского института экономики и управления
Частное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский институт экономики и управления»
194044, г. Санкт-Петербург, Крапивный переулок, 5

Балыбин Алексей Романович –
к. т. н., доцент кафедры Управления транспортными системами
ФГБОУ ВО Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова
198035, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7

Грамацкий Александр Сергеевич –
бакалавр кафедры управления транспортными системами
ФГБОУ ВО Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С.О. Макарова
198035, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
E-mail: aleksandr502gramatskiy@gmail.com

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eglit Yan Yanovich –
DtS, Professor, head of the department TSM Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str, Saint-Petersburg, Russia, 198035
E-mail: eglit34@mail.ru

Eglite Katrina Yanovna –
DeS., Professor Department of Logistics Institute of Economics and Management

Saint-Petersburg Institute of economics and management
5, Krapivniyside St, Saint-Petersburg, Russia, 194044

Balybin Alexey Romanovich – candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of UTS
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str, Saint-Petersburg, Russia, 198035

Gramatskiy Alexander Sergeevich –
bachelorof the department «Transportation Systems Management»
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str, Saint-Petersburg, Russia, 198035
E-mail: aleksandr502gramatskiy@gmail.com