УДК 656.073 DOI: 10.31799/2077-5687-2021-3-3-8

РЕКУРСИВНЫЕ ОЦЕНИВАТЕЛИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Я. Я. Эглит[1], К. Я. Эглите[2], М. А. Шаповалова[1], А. А. Юрченко[1]
[1]Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова
[2]Санкт-Петербургский институт экономики и управления

В статье представлены результаты применения рекурсивных оценивателей. Большое значение при этом имеет реализация оценивания параметров в информационных системах различных вариантов сигналов и структур рассматриваемых моделей.
Ключевые слова: оценивание, рекурсивные оцениватели, модели, системы, вектор, наименьшие квадраты, величины.

Для цитирования:
Эглит Я. Я., Эглите К. Я., Шаповалова М. А., Юрченко А. А. Рекурсивные оцениватели и их применение // Системный анализ и логистика: журнал.: выпуск №3(29), ISSN 2077-5687. – СПб.: ГУАП., 2021 – с. 3–8. РИНЦ. DOI: 10.31799/2077-5687-2021-3-3-8.

RECURSIVE EVALUATORS AND THEIR IMPLEMENTATION

Y. Y. Eglit[1], K. Y. Eglit[2], A. R. Balybin [1], A.A. Yurchenko [1]
[1]Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
[2]Saint-Prtersburg Institute of economics and management

The results of implementation of recursive evaluators are introduced in the present article. Realization of parameter estimation of different structural and signal models is essential in information systems.
Key words: estimation, recursive evaluators, models, systems, vector, least squares algorithm, values.

For citation:
Eglit Y. Y., Eglit K. Y., Balybin A. R., Yurchenko A. A. Recursive evaluators and their implementation // System analysis and logistics. №3(29), ISSN2077-5687. – Russia, Saint-Petersburg.: SUAI., 2021 – p.3–8. DOI: 10.31799/2077-5687-2021-3-3-8.

1. Введение

Выбор вычислительных процедур, основанных на рекуррентных схемах, играет важную роль в реализации процессов оценивания параметров сигналов и структур построения моделей в информационных системах. Их эффективное использование во многом определяет производительность вычислительных средств. Например, рекуррентный метод наименьших квадратов позволяет значительно сократить число операций за счет аддитивной составляющей, используемой в процессе инверсии информационной матрицы.

2. Рекурсивные оцениватели

Ниже рассмотрим модели наблюдаемых величин,

$$y_i = H_i + w_i, \qquad i = 1, \dots, k, \tag{1}$$

обладающей свойствами, приписанными переопределенной системе. Среднее значение шума w равно нулю. Заметим, что матрица H, изменяется от шага к шагу.

Выборку объемом “K” представим в виде матричного уравнения

$$H^{(k)}x + w^{(k)} = y^{(k)}, \tag{2}$$

где $y^{(k)}$-m-мерный составной вектор-столбец

$$y^{(k)} = [y_1\, y_2 \cdots y_k]^T,$$

$H^{(k)}$ – матрица размерности (m×n), $w^{(k)}$ – (m×1) – мерный вектор:

$$H^{(k)} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_k \end{bmatrix}; w^{(k)} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_k \end{bmatrix}$$

Так как результат каждого наблюдения может представляться вектором, то размерность m больше k. Система (1) имеет полный ранг n, причем m ≥ n.

Минимум для критерия качества [2]:

$$J(x_k) = \frac{1}{2}\left(y^{(k)} - H^{(k)}x_k\right)^T V_k^{-1}\left(y^{(k)} - H^{(k)}x_k\right), \quad (3)$$

где V^k – ковариационная матрица, обеспечивается с помощью оценки

$$\hat{x}_k = (H^{(k)T} \cdot V_k^{-1}H)^{-1} \cdot H^{(k)T} \cdot V_k^{-1} \cdot y^{(k)} \quad (4)$$

Предположим, что выполнено (k+1)-ое измерение yk+1, Hk+1 и wk+1. Тогда новое измерение, согласно (1), можно представить с помощью уравнения:

$$y_{k+1} = H_{k+1}x + w_{k+1} \quad (5)$$

с вектором x неизменной размерности (n×1).

Присоединим (5) к системе уравнений (2). С этой целью запишем:

$$y^{(k+1)} = \begin{bmatrix} y^{(k)} \\ \cdots \\ y_{k+1} \end{bmatrix}; H^{(k+1)} = \begin{bmatrix} H^{(k)} \\ \cdots \\ H_{k+1} \end{bmatrix}; w^{(k+1)} = \begin{bmatrix} w^{(k)} \\ \cdots \\ w_{k+1} \end{bmatrix}$$

Общепринятая процедура (4) предполагает выполнение повторных вычислений в полном объеме и получение оценки:

$$\hat{x}_{k+1} = (H^{(k+1)T} \cdot V_{k+1}^{-1} \cdot H^{(k+1)})^{-1} \cdot H^{(k+1)T} \cdot V_{k+1}^{-1} \cdot y^{(k+1)} \quad (6)$$

Индексы при $\hat{x}_k$ и $\hat{x}_{k+1}$ выбраны условно, чтобы показать переход от k измерений к (k+1) измерениям (размерность $\hat{x}$ не изменяется).

Тот факт, что добавление каждого нового результата наблюдений приводит к необходимости повторения всех вычислений, послужил отправной точкой для новых исследований, проводимых с целью отыскания последовательных алгоритмов, которые способствовали бы уменьшению объема вычислений или, по крайней мере, базировались на вычислениях, исполненных на предшествующих шагах. В результате получены алгоритмы, с помощью которых новые наблюдения учитываются как поправки, вносимые в значения уже имеющихся оценок. При этом полностью повторять вычисления не требуется. Такие алгоритмы могут быть определены при условии, что справедливо выполнение предположения о том, что весовая матрица V_{k+1}^{1} подчиняется разделению на блоки [3]:

$$V_{k+1}^{-1} = \begin{bmatrix} V_k^{-1} & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & V_{k+1}^{-1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Из (7) видно, что мы отказываемся от необходимости взвешивать произведения ошибок между результатами первых k и (k+1)-го нового наблюдений. Взамен же получаем эффективные вычислительные алгоритмы, обладающие уменьшением числа операций ЭВМ на несколько порядков.

В соответствии с процедурами преобразований блочных матриц, для равенства (7) произведение $H^{(k+1)} \cdot V^{(k+1)} \cdot H^{(k+1)}$ можно записать:

$$H^{(k+1)T} \cdot V_{k+1}^{-1} \cdot H^{(k+1)} = [H^{(k)T} \quad \vdots \quad H_{k+1}^T] \cdot \begin{bmatrix} V_k^1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & V_{k+1}^1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H^{(k)} \\ \cdots \\ H_{k+1} \end{bmatrix} =$$

$$= H^{(k)T} \cdot V_k^{-1} \cdot H^{(k)} + H_{k+1}^T \cdot v_{k+1}^{-1} \cdot H_{k+1} \qquad (8)$$

Введем обозначения:

$$S_k = (H^{(k)T} \cdot V_k^{-1} \cdot H^{(k)})^{-1}$$

Тогда, согласно (8), для сокращения записи можно обозначить S_{k+1} как

$$S_{k+1}^{-1} = S_k^1 + H_{k+1}^T \cdot v_{k+1}^{-1} \cdot H_{k+1}$$

и, следовательно, ее обращение

$$S_{k+1} = (S_k^1 + H_{k+1}^T v_{k+1}^{-1} \cdot H_{k+1})^{-1} \qquad (9)$$

Применим к (9) лемму об обращении матриц для дальнейшего преобразования и упрощения процедуры вычислений:

$$S_{k+1} = S_k - S_k H_{k+1}^T (v_{k+1} + H_{k+1} \cdot S_k \cdot H_{k+1}^T)^{-1} \cdot H_{k-1} \cdot S_k \qquad (10)$$

Если вектор нового измерения y_{k+1} в уравнении (5) вырождается в скалярную величину, то матрица $(v_{k+1} + H_{k+1} \cdot S_k \cdot H_{k+1}^T)$ также будет скалярной величиной. И ее обращение не представляет труда, поскольку сводится к обычному делению:

Пусть $v_{k+1} = 1$ и $H_{k+1}^T = a$. Тогда (10) принимает вид:

$$S_{k+1} = S_k - S_k \cdot a(1 + a^T S_k \cdot a)^{-1} \cdot a^T \cdot S_k \qquad (11)$$

Этот результат совпадает с формулой из известной работы Роберта С.К.Ли [1]. Получен очень полезный результат, поскольку для нахождения новой оценки нет необходимости инвертировать матрицы большой размерности с получением новых измерений. Новая оценка определяется как старая, с которой суммируется линейный поправочный член, основанный на новой информации y_{k+1}, a и старой S_k:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + S_k a(a^T S_k a + 1)^{-1} \cdot (y_{k+1} - a^T \cdot \hat{x}) \qquad (12)$$

Рекуррентное оценивание начинается с заданных значений x_0 и S_0. Если они не заданы, а имеется в наличии система из n уравнений, мы должны получить S_n, x_n, а затем с помощью (12) выполнить последующие оценки.

Для получения рекуррентного алгоритма в общем случае (для вектора y_{k+1}) введем обозначение части второго слагаемого (10):

$$K_{k+1} = S_k \cdot H_{k+1}^T (v_{k+1} + H_{k+1} \cdot S_k \cdot H_{k+1}^T)^{-1}$$

Поскольку уравнение (6) можно записать в следующем виде:

$$\hat{x}_{k+1} = S_{k+1} \cdot H^{(k+1)T} \cdot V_{k+1}^{-1} \cdot y^{(k+1)} \qquad (13)$$

то, подставляя в (13) выражение (10), мы можем записать

$$\hat{x}_{k+1} = [S_k - S_k H_{k+1}^T (v_{k+1} + H_{k+1} \cdot S_k \cdot H_{k+1}^T)^{-1} \cdot H_{k+1} \cdot S_k] \cdot H^{(k+1)T} \cdot V_{k+1}^{-1} \cdot y^{(k+1)} \qquad (14)$$

Обращаясь вновь к специально выбранной форме ковариационной матрицы (7), с учетом того, что произведение

$$H^{(k+1)T} \cdot V_{k+1}^{1} \cdot y^{(k+1)} = H^{(k)T} V_k^{-1} y^{(k)} + H_{k+1}^{T} \cdot v_{k+1}^{-1} y_{k+1}, \qquad (15)$$

мы можем получить оценку $\hat{x}_{k+1}$ в следующем виде:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{x}_k + K_{k+1}(y_{k+1} - H_{k+1} \cdot \hat{x}_k) \qquad (16)$$

Это выражение получено с учетом того, что если в (15) первое слагаемое в правой части умножить на S, то оно будет представлять собой оценку $\hat{x}_k$ (без учета новых данных) [3,4].

Возвращаясь к (16), мы должны отметить, что каждое последующее значение оценки следует производить по предыдущей с добавлением поправки, зависящей от размерности y_{k+1} и ожидаемого значения $H_{k+1}\hat{x}_k$.

Работу рекурсивного оценивателя (16) продемонстрируем на следующем примере.

Предположим, что требуется оценить коэффициенты модели

$$y = ax + b$$

по следующим экспериментальным данным в пяти точках на плоскости (x, y):

(0,1), (1,2), (2,4), (4,5), (5,6)

Сформируем матрицу H и вектор y:

$$y = [1 \;\; 2 \;\; 4 \;\; 5 \;\; 6]'; \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Будем считать, что требуется рекурсивно оценить “а” и “в” по следующим данным: на первом шаге

$$H1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \qquad y_1 = [1 \;\; 2 \;\; 4]'$$

на втором шаге

$$H2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \qquad y_2 = [5 \;\; 6]'$$

Решение выполним для $V_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ и $v_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Для оценки $\hat{x}_1$ используем операцию левого делению:

$$\hat{x}_1 = H1 \setminus y_1 = \begin{bmatrix} 1.5000 \\ 0.8333 \end{bmatrix}$$

Затем определим S1:

$$S1 = (H1^T * I^{-1} * H1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.5000 & -0.5000 \\ -0.5000 & 0.8333 \end{bmatrix}$$

Для расчета S2 по формуле (10) предварительно найдем матрицу D, равную

$$D = (v_2 + H2 \cdot S1 \cdot H2^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.6512 & -0.4419 \\ -0.4419 & 0.4070 \end{bmatrix}$$

Затем, используя D, получим:

$$S2 = S1 - S1 * H2^T * D * H2 * S1 = \begin{bmatrix} 0.0581 & -0.1395 \\ -0.1395 & 0.5349 \end{bmatrix}$$

Оценка коэффициентов “а” и “в” на втором шаге, согласно (16), будет состоять из оценки x_1 и дополнительной составляющей, определяющей «вклад» экспериментальных данных на втором шаге. Поскольку $v_2^{-1} = I$, для оценки используем выражение:

$$\hat{x}2 = \hat{x}1 + S2 * H2^T * (y_2 - H2 * \hat{x}1) = \begin{bmatrix} 0.9767 \\ 1.2558 \end{bmatrix}$$

Для вычислений мы предлагаем файл “sahop203.m”, содержащий исходные данные, из которых путем “вырезки” из матрицы H получены H1, H2, y_1 и y_2. Затем по приведенным выше соотношениям рассчитаны S1, D, S2 и получены $\hat{x}1$ и $\hat{x}2$.

% Файл “sahop203.m”.

% Последовательный алгоритм МНК.

$y = [1\ \ 2\ \ 4\ \ 5\ \ 6]'; H = [0\ \ 1\ \ 2\ \ 4\ \ 5; 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1]';$

$H1 = H(1:3,:);$

$H2 = H(4:5,:);$

$y1 = y(1:3,:);$

$y2 = y(4:5,:);$

$S1 = inv(H1' * H1);$

$D = inv([1\ \ 0; 0\ \ 1] + H2 * S1 * H2');$

$S2 = S1 - S1 * H2' * D * H2 * S1;$

% Вычисление оценок:

$x1 = H1 \setminus y1$

$x2 = x1 + S2 * H2' * (y2 - H2 * x1)$

В заключение проведена проверка решения путем использования прямой оценки по формуле:

$$\hat{x} = H \setminus y = \begin{bmatrix} 0.9767 \\ 1.2558 \end{bmatrix}$$

Этот результат эквивалентен $\hat{x}2$.

Таким образом, модель

$$y_m = 0.9767 * x + 1.2558$$

3. Заключение

Разработаны основы процедур оценивания сигналов в информационных системах по экспериментальным данным.

Выведены математические соотношения параметров сигналов в условиях ограничений.

Представлено применение рекурсивных оценивателей.

Разработан алгоритм проверки качества модели путем нахождения числа обусловленности матрицы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ли Р. Оптимальные оценки, определение характеристик и управление. – М.: Наука, 1986. – 174 с.
2. Беллман Р. Введение в теорию матриц. – М.: Наука, 1998. – 271 с.
3. Эглите К. Я. Кумуляция сведений об информационных потребителях морского порта. – СПб.: Петровский фонд, 2018. – 171–178 с.
4. Эглит Я. Я. Менеджмент и маркетинг. – СПб.: Феникс, 2016. – 380 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Эглит Ян Янович –
д.т.н., профессор, заведующий кафедрой Управления транспортными системами ГУМРФ им. адм. С. О. Макарова
ФГБОУ ВО Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова
198035, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7
E-mail: eglit34@mail.ru

Эглите Катрина Яновна –
д. э. н., профессор кафедры логистики Санкт-Петербургского института экономики и управления
Частное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский институт экономики и управления»
194044, г. Санкт-Петербург, Крапивный переулок, 5

Шаповалова Мария Андреевна–
к. т. н., доцент кафедры Управления транспортными системами
ФГБОУ ВО Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова
198035, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7

Юрченко Анастасия Андреевна –
магистр кафедры “Управление транспортными системами”
ФГБОУ ВО Государственный университет морского и речного флота имени адмирала С. О. Макарова
198035, г. Санкт-Петербург, ул. Двинская, 5/7

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Eglit Yan Yanovich –
DtS, Professor, head of the department TSM Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str, Saint-Petersburg, Russia, 198035
E-mail: eglit34@mail.ru

Eglite Katrina Yanovna –
DeS., Professor Department of Logistics Institute of Economics and Management
Saint-Petersburg Institute of economics and management
5, Krapivniy side St, Saint-Petersburg, Russia, 194044

Shapovalova Maria Andreevna–
candidate of technical sciences, Associate Professor of the Department of UTS
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str, Saint-Petersburg, Russia, 198035

Yurchenko Anastasia Andreevna –
Master of the Department " Management of Transport Systems”
Admiral Makarov State University of Maritime and Inland Shipping
5/7, Dvinskaya str, Saint-Petersburg, Russia, 198035