УДК 621.37.621.391 DOI: 10.31799/2077-5687-2022-1-3-8

ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРАЛЬНО-ФИНИТНОГО МЕТОДА ФИЛЬТРАЦИИ СИГНАЛОВ

А. Ю. Федоринов, Ю. П. Иванов
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Исследование оптимального, стационарного спектрально-финитного метода фильтрации сигналов на основе теоремы ортогонального проецирования для широкого класса сигналов и помех и сравнительный анализ с методом Калмана. Построение графиков наглядно показывающих зависимости дисперсий ошибок оценок исследуемых алгоритмов от времени.

Ключевые слова: спектрально-финитный метод оценки сигналов, разложение в ряд Фурье, собственные числа, собственные вектора.

***Для цитирования**:*
Федоринов А. Ю., Иванов Ю. П. Исследование спектрально-финитного метода фильтрации сигналов // Системный анализ и логистика: журнал.: выпуск №1(31), ISSN 2007-5687. – СПб.: ГУАП., 2022 – с.3-8. РИНЦ. DOI: 10.31799/2077-5687-2022-1-3-8.

RESEARCH AND MODELING OF THE SPECTRAL-FINITE METHOD OF SIGNAL FILTERING

A. Y. Fedorinov, Y. P. Ivanov
St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

Investigation of the optimal, stationary spectral-finite method of signal filtering based on the orthogonal projection theorem for a wide class of signals and interference and comparative analysis with the Kalman method. Plotting graphs that clearly show the dependence of variances of errors of estimates of the algorithms under study on time.

Keywords: spectral-finite method of signal estimation, Fourier series decomposition, eigennumbers, eigenvectors.

For citation:
Fedorinov A. Y., Ivanov Y. P. Research and modeling of the spectral-finite method of signal filtering // System analysis and logistics.: №1(31), ISSN 2007–5687. – Russia, Saint-Petersburg.: SUAI., 2022 –p.3-8. DOI: 10.31799/2077-5687-2022-1-3-8.

Введение

Современные методы фильтрации сигналов в основном основываются на методе Калмана.

Фильтрация Калмана широко применяется на сегодняшний день ввиду следующих достоинств [1]:

1) Критерий оптимальности фильтрации - средний квадрат ошибки оценки;
2) Метод оптимален как при установившемся, так и при переходном процессе;
3) Оценка сигналов осуществляется по рекуррентным формулам;
4) В процессе оценки сигналов используются все измерения.

Однако, наряду с достоинствами, необходимо отметить и следующие недостатки фильтрации Калмана:

1) Использование рекуррентной обработки сигналов основано на свойстве марковости полезного сигнала, что вызывает необходимость ограничиваться моделью сигналов в пространстве состояний и, в общем случае, приводит к снижению универсальности метода, повышению размерности вектора оцениваемых процессов и к использованию обратной связи для получения оптимальной оценки;

2) Наличие обратной связи приводит к неустойчивой работе алгоритма при изменении исходных данных в процессе работы и накоплении ошибок вычислений;

3) Отсутствие универсальности алгоритмов оценки при использовании моделей помехи в виде белого шума или коррелированной помехи измерения;

4) Необходимость вычисления нелинейного уравнения Риккати для работы алгоритма.

В связи с этим вытекает необходимость рассмотрения нового метода обработки информации. Таким методом стала спектрально-финитная обработка сигналов.

Постановка задачи

В данной работе рассматривается спектрально-финитный алгоритм, который является альтернативой Калмоновской фильтрации. Основные достоинства спектрально - финитного метода:

1. Спектрально-финитный алгоритм является универсальным относительно используемых сигналов и помех
2. Не требует представлять сигнал в пространстве состояний и Марковости полезного сигнала
3. Не требует решения уравнения Риккати
4. Отсутствие обратной связи в алгоритме обеспечивает повышенную помехозащищенность и робастность алгоритма.

Спектрально-финитная обработка сигналов основана на финитно-временной фильтрации [3], с последующим преобразованием модели измерения в спектральную область на финитном интервале времени, это позволяет существенно упростить алгоритм обработки сигналов, такой подход базируется на использование конечной памяти реальных устройств фильтрации сигналов систем обработки, что приводит к экономии памяти.

Проведение исследования и сравнительного анализа спектрально-финитной фильтрации с фильтрации Калмана, рассмотрена на примере линейной модели измерения сигналов с аддитивной погрешностью:

$$Y_i = X_i + H_i, i = 1, 2 ... N, \tag{1}$$

где Yi – наблюдаемый случайный сигнал, в момент времени i, Xi – случайная скалярная последовательность, в общем случаи не марковская и не стационарная, определяемая полезным сигналом в момент времени i, Hi – помеха измерения в момент времени i, N – объем выборки. Погрешность измерения не коррелирована с полезным сигналом.

На основе соотношения (1) для повышения точности оценки сигнала можно перейти к векторной модели измерения:

$$Z_i = X1_i + H1_i, \quad i = 1, 2 ... N, \tag{2}$$

где векторы наблюдаемого сигнала, полезного сигнала и помехи определяются следующими соотношениями:

$$Z_i^T = \left[Z_i, Z_{i-1} ... Z_{i-r1+1}\right], X1_i^T = \left[X1_i, X1_{i-1} ... X1_{i-r1+1}\right], H1_i^T = \left[H1_i, H1_{i-1} ... H1_{i-r1+1}\right]. \tag{3}$$

Переход к спектрально-финитной фильтрации основан на представлении случайного сигнала на финитном интервале времени в виде частичной суммы ряда Карунена-Лоэва, который является частным случаем ряда Фурье. [4]

Как известно [4], разложение полезного сигнала и помехи в ряд Фурье представляется в виде следующей формулы:

$$X_i = \sum_{k=1}^{n} Cx_{i-k} \times \Psi_k \quad (4)$$

Где Ψk – ортонормальный полный базис Карунена-Лоэва, а коэффициенты Cxik определяются из скалярного произведения: Cxi= (X_i, Ψ_k), Cxi-k –спектральная компонента представления случайного процесса на интервале от i…i-n.

Оптимальная оценка вектора спектральной компонент представления сигнала рассчитывается по следующей формуле (4).

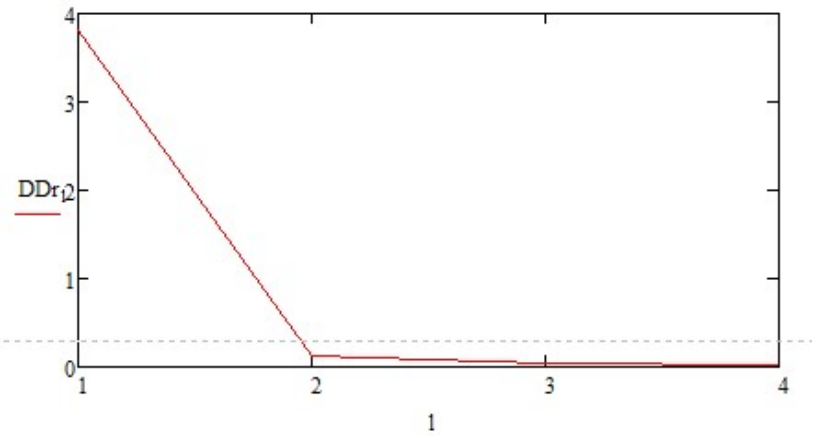
В дальнейшем в спектрально-финитном алгоритме используется только ограниченное число спектральных компонент (соответственно s≤n в связи с повышенной информативностью первой и второй компоненты), учитывая это из скалярного выражения получаем:

$$\hat{C}x1^*{}_{s,i} = Acx1^*{}_i * Cz_i \quad , \quad (5)$$

где, Cz.i вектор спектральных компонент сигнала, повторяя операцию $\hat{C}x1^*{}_s = (X1_s, \Psi_k)$

$\hat{C}x1^*{}_s$ – вектор оптимальной по критерию минимума следа матрицы корреляционной функции среднего квадрата ошибки оценки вектора спектральных компонент Cx[i],s, где s – размерность вектора, меньшего чем размерность всех компонент.

Само же значение s выбирается исходя из параметров требуемой точности, s меньше n размерности вектора всех компонентов, что видно из представленного рисунка 1.



$$DDr = \begin{pmatrix} 3.808 \\ 0.129 \\ 0.04 \\ 0.023 \end{pmatrix}$$

Рис. 1. График распределения значения собственных чисел, собственных векторов от номера компоненты.

На графике 1 представлено, сколько информации несет каждая компонента и из него следует, что наибольшей информативностью обладают первая и вторая компонента. Использования только их двоих будет достаточно по заданной точности.

$A^*{}_s$ – оператор оптимальной оценки определяется из следующего выражения [4]:

$$A^*{}_s = \text{К}Cx1_s * KC_z{}^{-1}, \quad (6)$$

где $\text{К}Cx1_s, KC_z$ – корреляционной матрицы сигнала и сигнала с помехой.

Оптимальная оценка сигнала во временном представлении будет определяться через оптимальный оператор следующим образом:

$$\text{A}^*x1_s = BB_s \cdot ACx1 *_{Ts} \cdot BB_{cs}{}^T; \quad (7)$$

$$\hat{\text{X}}1^*{}_i = \text{Ax}1^*{}_i \cdot Z_i, \quad (8)$$

где BB – матрица собственных векторов корреляционной функции полезного сигнала, то есть BB= Ψ.

Корреляционная матрица оценки сигнала:

$$K_{\hat{X}} = A^*{}_{Ts} \cdot Kz_{Ts} \cdot A_s{}^{*T} \tag{9}$$

Модели сигналов и помех представляют собой случайные стационарные, эргодические, дискретные, с нормальными законами распределения погрешности, результатов измерения. Корреляционная функция полезного сигнала имеет вид:

$$Kx_{i,j} = \sigma_X{}^2 exp\{-\alpha_X |i-j| \cdot d\}[cos\beta_X |i-j| \cdot d + (\frac{\alpha_X}{\beta_X} sin\beta_X |i-j| \cdot d)], \tag{10}$$

В качестве модели помехи измерения был выбран белый шум, корреляционная функция которого имеет вид:

$$Ke_{i.j} = \sigma_E{}^2 \cdot \delta_{ij}, \tag{11}$$

где σ_E^2 - дисперсия погрешности сигнала, δi,j – дельта-функция, d- дискрет.

В качестве показателя точности алгоритма используется оценка дисперсии ошибки оценки, зависимость которой от времени представлена на рисунке 2.

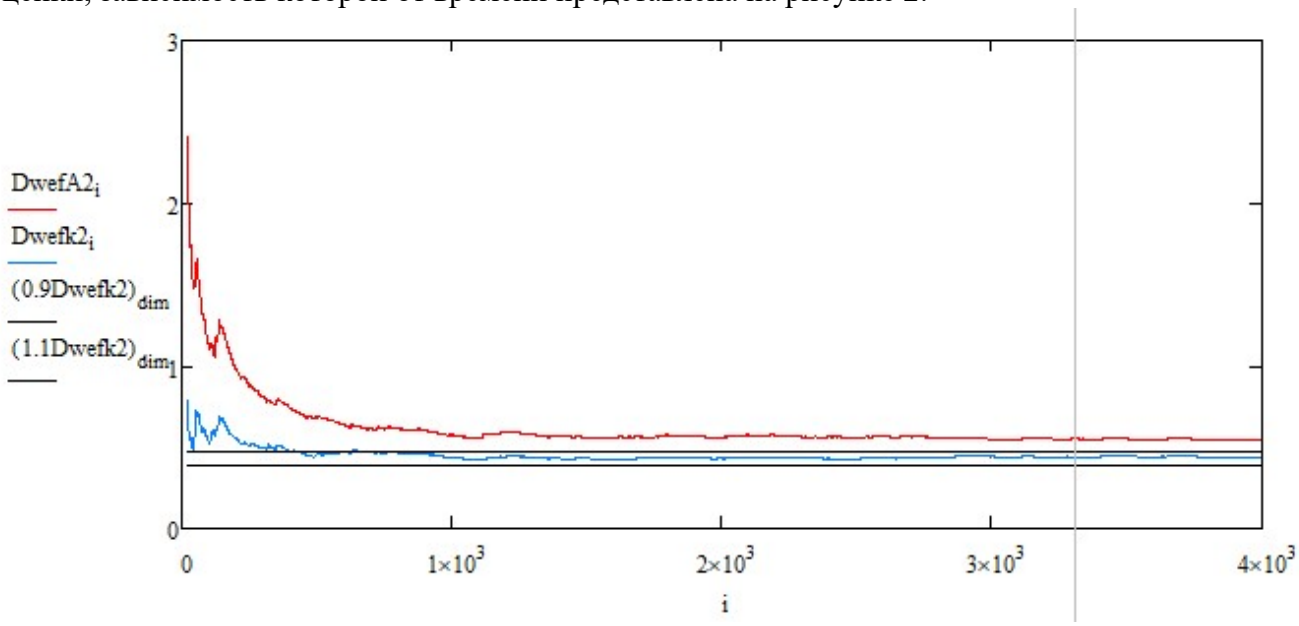


Рис. 2. График зависимости дисперсий ошибок оценок исследуемых алгоритмов от времени.

Где:

- DwefA2i – дисперсия ошибок оценок сигнала на выходе фильтра, реализующего спектрально-финитный алгоритм фильтрации;
- Dwefk2i – дисперсия ошибок оценок сигнала на выходе фильтра, реализующего алгоритм фильтрации Калмана.

Как видно из рисунка 2, дисперсии ошибок оценок спектрально-финитного алгоритма асимптотически стремится к фильтрации Калмана. При этом величины дисперсий алгоритмов отличаются незначительно.

Отметим, что спектрально-финитный алгоритм незначительно проигрывает по точности фильтрации Калмана (при r=4), но имеет ряд значительных достоинств:

1. Простая реализация;
2. Универсальный алгоритм относительно модели помех;

3. Отсутствия обратной связи обеспечивает устойчивость алгоритма.
4. Определяемые коэффициенты «С», могут быть использованы для решения важных задач, например, для оценки достоверности прогноза невыхода сигнала из заданных пределов

В качестве недостатков исследуемого метода можно отметить сложность определения собственных чисел и собственных векторов для корреляционных матриц. Нивелировать это можно путем замены разложение ряда Карунена-Лоэва на известный ряд Фурье, который приведет к незначительной потере в точности.

Заключение

Подводя итоги, можно сказать, что, рассмотренный метод спектрально-временной оценки произвольных сигналов на фоне произвольных дискретных помех обеспечивает оптимальную оценку в классе линейных по критерию следа матрицы корреляционных моментов ошибок оценок.

Предлагаемый метод оценки является универсальным с точки зрения моделей сигналов и помех при использовании линейной модели измерения. Он отличается сжатием информации при представлении сигналов, что ведёт к экономности модели измерения и высокой устойчивости работы. Реализация метода оценивания является более простой по сравнению с классическими методами оценки сигналов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов Ю.П. Финитно-временной метод оптимальной фильтрации дискретных сигналов / Иванов Ю.П. // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2018. – №5. – С. 23 – 27.
2. Светлов И.В. Исследование финитно-временного метода фильтрации сигналов скорости летательного аппарата. / Светлов И.В., Иванов Ю.П. // Семьдесят третья международная студенческая научная конференция ГУАП. – 2020. – С. 43 – 46.
3. Иванов Ю.П. Комплексирование информационно-измерительных устройств летательных аппаратов / Иванов Ю.П., Синяков А.Н., Филатов И.В. – Под ред. В. А. Боднера. Л. Машиностроение, 1984. – 207 с.
4. Иванов Ю.П. Теория информационных измерительных систем. / Иванов Ю.П., Бирюков Б.Л. – ГУАП, 2013. – 160 с.
5. Сейдж Э. Теория оценивания и её применение в связи и управлении //Дж. Мелс, - М.: Связь, 1976. – 496 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Федоринов Алексей Юрьевич –
магистрант кафедры аэрокосмических измерительно-вычислительных комплексов
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А
E-mail: Fedorinov.aleksey@mail.ru

Иванов Юрий Павлович –
кандидат технических наук, доцент
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А
E-mail: ypi35@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Fedorinov Aleksey Yurievich –
postgraduate student of the Department of Air Navigation and Operation of Aviation and Rocket and Space Technology
Saint-Peterdburg State University of Aerospace Instrumentation
67, BolshayaMorskaia str.Saint-Petersburg,190000, Russia
E-mail: Fedorinov.aleksey@mail.ru

Ivanov Yuriy Pavlovich –
postgraduate student of the Department of Air Navigation and Operation of Aviation and Rocket and Space Technology
Saint-Peterdburg State University of Aerospace Instrumentation
67, BolshayaMorskaia str.Saint-Petersburg,190000, Russia
E-mail: ypi35@mail.ru