УДК 621.396.967; 621.396.969.14; 629.7.05 DOI: 10.31799/2077-5687-2023-4-12-22

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАДИОЛОКАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ РАДИАЛЬНОЙ СКОРОСТИ В ЗАДАЧАХ (МИКРО)НАВИГАЦИИ АВИАЦИОННОГО РАДАРА

Ю. В. Колосова, В. Н. Коврегин
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

Проведена оценка возможностей использования каналов измерения радиальной скорости, реализуемых в типовой когерентной импульсной РЛС авиационного базирования, в качестве корректоров для инерциально-спутниковой микронавигационной системы РЛС, функционирующей в сложной сигнально-помеховой обстановке, приводящей к неработоспособности аппаратуры потребителей спутниковых навигационных систем.

Ключевые слова: импульсно-доплеровский радар, частотно-временные измерения, радиальная скорость, инерциально-радиолокационные наблюдения.

Для цитирования:
Колосова, Ю. В. Аналитическая оценка возможностей использования радиолокационных измерений радиальной скорости в задачах (микро)навигации авиационного радара / Ю. В. Колосова, В. Н. Коврегин // Системный анализ и логистика. – 2023. – № 4(38). – с. 12 – 22. DOI: 10.31799/2077-5687-2023-4-12-22.

ANALYTICAL ASSESSMENT OF THE POSSIBILITIES OF USING RADIAL VELOCITY MEASUREMENTS IN (MICRO)NAVIGATION TASKS OF AN AIRCRAFT RADAR

Y. V. Kolosova, V. N. Kovregin
St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

An assessment was made of the possibilities of using radial velocity measurement channels, implemented in a typical coherent pulsed aircraft-based radar, as correctors for an inertial-satellite micronavigation system in a radar operating in a complex signal-interference environment, leading to the inoperability of the equipment of consumers of satellite navigation systems.

Keywords: pulse-Doppler radar, time-frequency measurements, radial speed, inertial-radar observation.

For citation:
Kolosova, Y. V. Analytical assessment of the possibilities of using radial velocity measurements in (micro)navigation tasks of an aircraft radar / Y. V. Kolosova, V. N. Kovregin // System analysis and logistics. – 2023. – № 4(38). – p. 12 – 22. DOI: 10.31799/2077-5687-2023-4-12-22.

Введение

Когерентные импульсные РЛС обладают высокой потенциальной возможностью в измерении вектора путевой скорости летательного аппарата (ЛА). Традиционно путевая скорость радиотехническими методами измерялась, в основном, с помощью доплеровских измерителей скорости и угла сноса (ДИСС). Точность ДИСС зависит от углового положения ЛА, степени однородности отражающей поверхности и др. Наличие возможности разрешения по дальности, электронная стабилизация главного луча (ГЛ) в пространстве для фазированных антенных решеток в современных авиационных бортовых РЛС позволяют существенно повысить точность измерения скорости, а современные вычислительные средства могут реализовать оптимальные алгоритмы оценки скорости. Так как в РЛС возможно создание двух лучей, функционирующих одновременно (многолучевой режиме антенны), то задача измерения вектора путевой скорости разделяется на измерение радиальной скорости по каждому разрешающему элементу поверхности и на оценку вектора путевой скорости по радиальным скоростям с учетом углового положения диаграммы направленности. Потенциальная точность измерения скорости достигается при использовании цифровых топографических карт, содержащих рельеф местности. Последние снимают неопределенность в значении доплеровского сдвига частот в зависимости от угла места отражающего элемента поверхности. Далее это условие считаем выполненным.

Основная часть

1. Точность измерения радиальной скорости

Существуют два подхода к измерению радиальной скорости, основанные на одном и том же физическом принципе – эффекте Доплера [1-3], но при этом вычислительные схемы – разные. Первый – основан на получении измерений спектра мощности межпериодного отраженного сигнала за временной интервал и, затем, оптимальной оценке сдвига частоты. Второй – основан на текущей оценке комплексной межпериодной корреляционной функции с последующим суммированием набега фазы в пределах интервала измерений. Оба метода используют достаточную статистику и, в оптимальном исполнении, приводят к одинаковым точностям. Первый метод более быстрый в счете, но дает результат только на конец интервала измерений. Второй - имеет скользящую оценку набега фазы и, соответственно, текущую оценку скорости. В задачах микронавигации фазового центра антенны РЛС при землеобзоре [1, 2] и обзоре воздушного пространства [4] предъявляются высокие требования к точности измерения скорости и этом аспекте целесообразно оценить возможности РЛС.

2. Оценка радиальной скорости по спектру мощности

Пусть комплексный принятый сигнал

$$X_t^n = S_t^n + Z_t^n \quad ,$$

где S_t^n - комплексный отраженный сигнал; Z_t^n - шум приемника; n - номер строба; t - номер зондирования.

Спектр мощности сигнала X_t^n можно записать в виде

$$P^n(\omega) = \left|G^2(\omega-\omega_0)\cdot\eta_0^n(\omega) + \hat{Z}_0^n(\omega)\right|^2 + \left|G^2(\omega-\omega_0)\cdot\eta_1^n(\omega) + \hat{Z}_1^n(\omega)\right|^2 \qquad (1)$$

где G - диаграмма направленности антенны (ДНА) в функции доплеровской частоты;

$\hat{Z}_0^n(\omega)$ - реальная компонента спектра шума;

$\hat{Z}_1^n(\omega)$ - мнимая компонента;

$\eta_1^n(\omega), \eta_0^n(\omega)$ - нормальные стандартные случайные величины, характеризующие квадратуры отраженного сигнала (при релеевской флюктуации).

Полагаем, что диаграмма ДНА в вертикальной плоскости *Cosec*^{2} и, соответственно, отношение сигнал/шум по всем дискретам дальности одинаковое. Пусть T - период повторения зондирующих импульсов. Тогда, максимальная граничная частота в спектре отраженного сигнала $-\frac{\pi}{T}$ может оказаться меньшей доплеровской частоты ω_0. В этом случае происходит стробоскопическое преобразование спектра, которое не меняет существа задачи, при условии, что ширина спектра отраженного сигнала $\Delta\omega$ существенно меньше $\frac{\pi}{T}$. Обычно, это условие выполняется. Возникающая стробоскопическая неоднозначность раскрывается даже по датчикам малой точности, например, инерциальных из состава микронавигационной системы (МНС) БРЛС.

Пусть NT -временной интервал оценки скорости, $(N>>1)$. Тогда разрешаемые дискреты частоты следуют с шагом $\frac{\pi}{NT}$ и, будем полагать, что ω пробегает эту сетку частот.

Оценка максимального правдоподобия $\hat{\omega}$

$$\max_{\hat{\omega}_0} L = \prod_{\omega} \frac{1}{G^4(\omega - \hat{\omega}_0) + \sigma^2} \cdot e^{-\frac{I(\omega)}{G^4(\omega-\hat{\omega}_0)+\sigma^2}}, \tag{2}$$

где $I(\omega)$ - выборочный спектр мощности /периодограмма/;

σ^2 - мощность шума;

$G^4(\omega - \omega_0)$ - спектр мощности сигнала.

Точка максимума (2) $\hat{\omega}_0$ совпадает с точкой максимума

$$\max_{\hat{\omega}_0} Ln = \sum_{\omega} - \frac{I(\omega)}{G^4(\omega - \hat{\omega}_0) + \sigma^2}, \tag{3}$$

Случайные величины $I(\omega)$ представимы в виде $\left[G^4(\omega - \hat{\omega}_0) + \sigma^2\right] \cdot \eta_\omega$,

где η_ω - независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону $(1 - e^{-x})$.

Тогда

$$\max_{\hat{\omega}_0} Ln = \sum_{\omega} - \frac{\left[\mathrm{G}^4(\omega - \omega_0) + \sigma^2\right] \cdot \eta_\omega}{G^4(\omega - \hat{\omega}_0) + \sigma^2}, \tag{4}$$

Известно, что асимптотическая дисперсия оценки максимального правдоподобия

$$\sigma_\omega^2 = \frac{1}{J(\omega_0, N)} \tag{5}$$

где $J(\omega_0, N)$ – количество информации Фишера. Т.к. случайные величины асимптотически независимы, то количество информации

$$J = \sum_{\omega} J_\omega. \tag{6}$$

Для экспоненциального распределения $\frac{1}{P(\hat{\omega})} e^{-\frac{x}{P(\omega)}}$ количество информации

$$I_\omega = \mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial \omega} \ln\left\{\frac{1}{P(\hat{\omega})} e^{-\frac{x}{P(\hat{\omega})}}\right\}\right]^2 =$$

$$= \mathrm{E}\left[\frac{\partial}{\partial \hat{\omega}} \cdot \left(\ln P(\hat{\omega}) + \frac{x}{P(\hat{\omega})}\right)\right]^2 = \mathrm{E}\left[\frac{P'}{P} - \frac{xP'}{P^2}\right]^2 =$$

$$= \left(\frac{P'}{P}\right)^2 - 2\left(\frac{P'}{P}\right)^2 + 2\left(\frac{P'}{P}\right)^2 = \left(\frac{P'}{P}\right)^2 \tag{7}$$

$$P=\left.\frac{G^4\left(\omega-\omega_0+\sigma^2\right)}{G^4\left(\omega-\omega_0+\sigma^2\right)}\right|_{\omega=\omega_0}=1$$

где

$$P'=\left.\frac{\left[G^4+\sigma^2\right]4G^3G'}{\left[G^4+\sigma^2\right]^2}\right|_{\omega=\omega_0}=\frac{4G^3G'}{\left[G^4+\sigma^2\right]}$$

$$J_\omega=\frac{16G^6\cdot G'^2}{\left[G^4+\sigma^2\right]^2} \tag{8}$$

$$J=16\sum\frac{G^6\omega\cdot G'^2\,\omega}{\left[G^4\omega+\sigma^2\right]^2}\quad\to\quad 16\,\frac{NT}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\frac{G^6(\omega)\cdot G'^2\,(\omega)\;d\omega}{\left[G^4(\omega)+\sigma^2\right]^2} \tag{9}$$

Не вычисляя в явном виде интеграл J, приведем его оценки сверху и снизу

$$16\,\frac{NT}{\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}\frac{G^6(\omega)\cdot G'^2\,(\omega)\;d\omega}{\left[G^4(0)+\sigma^2\right]^2}\le J\le\frac{16\,NT}{\pi\sigma^4}\int\limits_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}G^6(\omega)\cdot G'^2\,(\omega)\;d\omega \tag{10}$$

В (10) диаграмма направленности входит в шестой степени, следовательно, битовые лепестки задавлены и допустима аппроксимация центрального лепестка гауссовской кривой

$$G_0^2(\omega)=G_0^2\,e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2},$$

где $\Delta\omega$ - ширина полосы частот при работе по фону местности. Тогда

$$\int\limits_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}G^6(\omega)\cdot G'^2\,(\omega)\;d\omega=\int\limits_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}G_0^6\cdot e^{-3\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2}\cdot G'^2_0\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega}{\Delta\omega^2}\right)^2\cdot e^{-\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2}\;d\omega=$$

$$=G_0^8\,\frac{1}{4\Delta\omega}\int\limits_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}}e^{-4\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2}\cdot\left(\frac{\omega}{\Delta\omega}\right)^2\;d\,\frac{\omega}{\Delta\omega}\approx$$

$$\approx G_0^8\,\frac{1}{4\Delta\omega}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-4x^2}x^2dx=G_0^8\,\frac{1}{\Delta\omega}\sqrt{\pi}=\sqrt{\pi}\,\frac{G_0^8}{\Delta\omega}\quad.$$

Соответственно

$$\frac{16NT}{\sqrt{\pi}\,\Delta\omega}\cdot\frac{G_0^8}{\left[G_0^4+\sigma^2\right]^2}\le\;J\le\frac{16NT}{\pi\sigma^4}\sqrt{\pi}\,\frac{G_0^8}{\Delta\omega}=\frac{16NT}{\sqrt{\pi}\,\Delta\omega}\cdot\frac{G_0^8}{\sigma^4} \tag{11}$$

Но $\dfrac{G_0^8}{\sigma^4}=q^2$, где q - отношение фон/шум на максимуме ДНА.

Следовательно

$$\frac{16NT}{\sqrt{\pi}\;\Delta\omega}\cdot\frac{q^2}{(1+q)^2}\le J\le\frac{16NT}{\sqrt{\pi}\Delta\omega}q^2 \tag{12}$$

Соответственно, для дисперсии оценки максимального правдоподобия

$$\frac{\sqrt{\pi}\Delta\omega}{16NT}\frac{1}{q^2}\le\;\sigma_\omega^2\le\frac{\sqrt{\pi}\;\Delta\omega\,(1+q)^2}{16NT\cdot q^2}\;. \tag{13}$$

Известно, что ширина полосы частот

$$\Delta\omega=2\pi\frac{w_\perp}{L_\perp}\;,$$

где $w_\perp$ - скорость, ортогональная лучу антенны;

$L_\perp$ - среднеквадратическое значение апертуры антенны по направлению $\vec{w}_\perp$.

Тогда, для точности измерения радиальной скорости по одному отражающему элементу поверхности имеем:

$$\sigma_{w_{||}}\le 4\left(\frac{2\sqrt{\pi}\cdot\pi\,w_\perp}{NTL_\perp}\right)^{1/2}\cdot\frac{1+q}{q}\;. \tag{14}$$

Рассмотрим численный пример.

Пусть $T = 10^{-3}$ *сек* ; $N = 10^3$; $L_\perp = 1$ *м* ; $q = 1$,

тогда

$$\sigma_{w_{||}}\le\frac{1}{2}\left(\sqrt{\pi}\cdot 2\pi\right)^{1/2}\cdot w_\perp^{1/2}=1{,}67\cdot w_\perp^{1/2}\;. \tag{15}$$

При $w_\perp = 300$ *м/сек*

$$\sigma_{w_{||}}\le 1{,}67\cdot 300^{1/2}=29\;{}^{м}\!/_{сек}\;.$$

Необходимо подчеркнуть, что это наихудший случай - малое отношение сигнал/шум и большая поперечная скорость. Для большого отношения сигнал/шум $\sigma_W \le 14{,}5$ *м/сек* .

Корреляционно-фазовый метод измерения скорости состоит в рекуррентной оценке межпериодной корреляционной функции

$$\hat{R}_{t,t+\tau}=\frac{1}{\mathrm{M}}\sum_{R=1}^{\mathrm{M}}X_t^k\cdot X_{t-\tau}^{k^*}\,,\qquad \tau=1,2\ldots\tau_{\max} \tag{16}$$

где X - комплексные отсчеты отраженного сигнала;

k - номер дискрета дальности.

Пусть $\hat{\varphi}_{t,\tau}=\arg\hat{R}_{t,t+\tau}$.

Тогда, текущий доплеровский набег фазы можно оценить по формуле

$$\hat{\Phi}_t=\sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}}\hat{\Phi}_{t-\tau}\cdot\alpha_\tau+\hat{\varphi}_{t,\tau}\;. \tag{17}$$

Оценка радиальной скорости

$$\hat{w}_{||}=\frac{\lambda}{4\pi}\cdot\frac{\Phi_{t_1}-\Phi_{t_0}}{(t_1-t_0)T} \tag{18}$$

Удобство оценки (17) в том, что она дает текущее радиальное смещение фазового центра антенны, которое можно легко комплексировать с другими датчиками смещения в задаче микронавигации. оптимальные значения коэффициентов α_τ зависят от формы диаграммы направленности. Соответствующие расчеты показывают, что оценка (18) сопоставима по точности с оценкой (3). В (16) количество дискретов дальности выбирается из суммарной ошибки, обусловленной как флюктуацией сигнала, так и смещением оценки из-за различия доплеровских частот.

3. Оценка вектора путевой скорости

Задача решается при наличии двух лучей излучения. Пусть $\vec{g}_1, \vec{g}_2$ - горизонтальные компоненты биссектрис диаграмм направленности, $\vec{\rho}_n^{(1)}, \vec{\rho}_k^{(2)}$ - векторы, соединяющие фазовый центр антенны с центрами разрешающих элементов отражающей поверхности, для первого и второго лучей, а $\hat{w}_n^{(1)}, \hat{w}_k^{(2)}$ - оценки радиальной скорости, соответствующие $\vec{\rho}_n^{(1)}, \vec{\rho}_k^{(2)}$. Вначале рассмотрим оценку компонент путевой скорости вдоль вектора $\vec{g}_1\left(\vec{g}_2\right)$ и вертикальной компоненты по данным одного луча $\left(\vec{w}_{g_1}, \vec{w}_h\right) = \vec{w}_1$.

Пусть $\vec{\alpha}_n^{(1)} = \dfrac{\vec{\rho}_n^{(1)}}{\left|\rho_n^{(1)}\right|}$ - орты первого луча. Задача решается методом наименьших квадратов.

Обозначим $\hat{w}^{(1)} = \left(\hat{w}_1^{(1)}, ..., \hat{w}_{n_{\max}}^{(1)}\right)$ - вектор измерений;

$\hat{w}_1$ - оценка вектора путевой скорости в плоскости первого луча;

$\alpha^{(1)}$ - матрица направляющих косинусов

$$\alpha^{(1)} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_1^{(1)} \\ \vec{\alpha}_2^{(1)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \vec{\alpha}_n^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Так как оценки компонент скорости по первому и второму лучу идентичны, то верхний индекс (0,1) для сокращения записи опустим. Имеем для оценки наименьших квадратов

$$\hat{w}_1 = \left(\alpha \cdot \alpha^T\right)^{-1} \cdot \alpha \cdot \hat{w} \tag{19}$$

Соответственно дисперсия оценки

$$B_1 = \left(\alpha \cdot \alpha^T\right)^{-1} \cdot \alpha \cdot \sigma_w^2 \cdot \alpha^T \left(\alpha \cdot \alpha^T\right)^{-1}, \tag{20}$$

где σ_n^2 - диагональная матрица, элементы которой равны дисперсиям оценок радиальной скорости.

Для получения явных выражений ошибок вектора путевой скорости рассмотрим горизонтальный полет над горизонтальной поверхностью Земли. При этом ограничимся частным, но важным для применения РЛС случае, когда $max\,\rho >> min\,\rho >> h$ - геометрическая высота полета.

Имеем для матрицы $\alpha\alpha^T$

$$\alpha\alpha^T = \sum |\alpha_n\rangle\langle\alpha_n| \quad , \qquad (21)$$

где $|\alpha_n\rangle = \left(|g\rangle\langle e_n|g\rangle,\ |e_h\rangle\langle e_n|e_h\rangle,\ 0\right)$;

e_h - вертикальный орт.

Но $\langle e_n|g\rangle = Cos\,\beta_n$, $\langle e_n|e_h\rangle = Sin\,\beta_n$,

где β_n - угол места вектора $\vec{\rho}_n$.

Тогда в плоскости луча антенны

$$\alpha\alpha^T = \sum_n \left(Cos\beta_n|g\rangle + Sin\beta_n|e_n\rangle\right)\cdot\left(\langle g|Cos\beta_n + \langle e_h|Sin\beta_n\right) =$$

$$= \sum_n \begin{pmatrix} Cos^2\beta_n\,, & Cos\beta_n\cdot Sin\beta_n \\ Cos\beta_n\cdot Sin\beta_n\,, & Sin^2\beta_n \end{pmatrix} \qquad (22)$$

Но

$$Cos\beta_n = \left(\frac{\sqrt{\rho_n^2 - h^2}}{\rho_n}\right) = \frac{\sqrt{\rho_n^2 - h^2}}{\rho_n^2} = \sqrt{1 - \frac{h^2}{\rho_n^2}} \quad ,$$

$$Sin\beta_n = -\frac{h}{\rho_n} \quad .$$

Приближенно, заменяя суммы интегралами, имеем

$$\sum_n Cos^2\beta_n = \frac{1}{\Delta r}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}}\left(1 - \frac{h^2}{\rho^2}\right)d\rho \approx \frac{\rho_{\max} - \rho_{\min}}{\Delta r} \quad ,$$

где Δr – разрешение по дальности.

$$\sum_n Sin^2\beta_n = \frac{1}{\Delta r}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}}\frac{h^2}{\rho^2}d\rho = \frac{h^2}{\Delta r}\left(\frac{1}{\rho_{\min}} - \frac{1}{\rho_{\max}}\right) = \frac{h^2}{\Delta r\,\rho_{\min}}$$

$$\sum_n Cos\beta_n\cdot Sin\beta_n \approx \frac{1}{\Delta r}\int_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}}\frac{h}{\rho^2}d\rho = \frac{h}{\Delta r}\ln\frac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}$$

Итак

$$\alpha\alpha^T \approx \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_{\max}}{\Delta r}\,, & -\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \\ -\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\,, & \dfrac{h^2}{\Delta r\cdot\rho_{\min}} \end{pmatrix} \qquad (23)$$

Выражение (23) для матрицы $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ получено для плоскости луча антенны. В трехмерном пространстве она имеет вид

$$
\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right| \;=\; \begin{pmatrix} \dfrac{\rho_{\max}}{\Delta r}\,, & -\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\,, & 0 \\ -\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}\,, & \dfrac{h^2}{\Delta r\,\rho_{\min}}\,, & 0 \\ 0\;\;, & 0\;\;, & 0 \end{pmatrix} \tag{24}
$$

Рассмотрим произведение

$$
\alpha\,\sigma_w^2\,\alpha^T \;=\; \begin{pmatrix} \left|\alpha_1\right\rangle \\ \left|\alpha_2\right\rangle \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left|\alpha_{n_0}\right\rangle \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & \sigma_{n_0}^2 \end{pmatrix} \left(\left\langle\alpha_1\right|\left\langle\alpha_2\right|\ldots\left\langle\alpha_{\alpha_n}\right|\right) \;=\; \sum\left|\alpha_n\right\rangle\sigma_n^2\left\langle\alpha_n\right| \tag{25}
$$

Но $\sigma_n^2 = d\cdot w_{\perp n}$, где $d = \dfrac{\pi^{3/2}}{8NTL_{\perp}}\cdot\dfrac{(1+q)^2}{q^2}$.

$$
\sigma_n^2 = d\left\langle w\right|\left(\mathrm{E}-\left|\alpha_n\right\rangle\left\langle\alpha_n\right|\right)\left(\mathrm{E}-\left|\alpha_n\right\rangle\left\langle\alpha_n\right|\right)\left|w\right\rangle^{1/2} = cw\left(1-\left\langle\frac{w}{|w|}\middle|\alpha_n\right\rangle^2\right)^{1/2}
$$

Тогда

$$
\sum_n \left|\alpha_n\right\rangle\,\sigma_n^2\,\left\langle\alpha_n\right| = cw\,\sum_n\left|\alpha_n\right\rangle\left(1-\left\langle\frac{w}{|w|}\middle|\alpha_n\right\rangle^2\right)^{1/2}\left\langle\alpha_n\right| \tag{26}
$$

Пусть $\vec{w} = \vec{w}_g\,,\,\vec{w}_h\,,\,\vec{w}_{\perp}$.

Тогда

$$
\left\langle\frac{w}{|w|}\middle|\alpha_n\right\rangle = \frac{1}{w}\left\langle w_g\,,w_h\,,w_{\perp}\middle|\alpha_n\right\rangle \;=\; \frac{1}{w}\left(w_g\cdot Cos\beta_n + w_h Sin\beta_n\right) \;=\; \frac{w_g}{w}\cdot Cos\beta_n\,,
$$

т.к. $w_h = 0$ для горизонтального полета. Соответственно

$$
\sum_n\left|\alpha_n\right\rangle\,\sigma_n^2\,\left\langle\alpha_n\right| = dw\,\sum_n\left|\alpha_n\right\rangle\left(1-\frac{1}{w^2}\left(w_g Cos\beta_n\right)^2\right)^{1/2}\left\langle\alpha_n\right| \;=
$$

$$
=\; dw\cdot\begin{pmatrix} \displaystyle\sum_n Cos\beta_n\left(1-\frac{1}{w^2}\left(w_g Cos\beta_n\right)^2\right)^{1/2}\cdot Cos\beta_n\,, & \displaystyle\sum_n Cos\beta_n\left(1-\frac{\left(w_g Cos\beta_n\right)^2}{w^2}\right)^{1/2} Sin\beta_n \\ \displaystyle\sum_n Sin\beta_n\left(1-\frac{\left(w_g Cos\beta_n\right)^2}{w^2}\right)^{1/2} Cos\beta_n\,, & \displaystyle\sum_n Sin\beta_n\left(1-\frac{1}{w^2}\left(w_g Cos\beta_n\right)^2\right)^{1/2}\cdot Sin\beta_n \end{pmatrix} \tag{27}
$$

Приближенно, заменяя суммы интегралом, с учетом малости углов, имеем

$$\sum_n \left|\alpha_n\right\rangle \sigma_n^2 \left\langle\alpha_n\right| = cw\begin{pmatrix} \dfrac{w_\perp}{w}, & -\dfrac{w_\perp}{w}\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \\ -\dfrac{w_\perp}{w}\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}, & \dfrac{h^2}{\Delta r\rho_{\min}}\dfrac{w_\perp}{w} \end{pmatrix} \tag{28}$$

Соответственно, в плоскости луча антенны

$$B = dw_\perp\begin{pmatrix} \dfrac{\rho_{\max}}{\Delta r}, & -\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \\ -\dfrac{h}{\Delta r}\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}, & \dfrac{h^2}{\Delta r\rho_{\min}} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{\pi^{3/2}}{8NTL_\perp}\frac{(1+q)^2}{q^2}\begin{pmatrix} \dfrac{\Delta r}{\rho_{\max}}, & \dfrac{\Delta r\cdot\rho_{\min}}{h\rho_{\max}}\cdot\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}} \\ \dfrac{\Delta r\cdot\rho_{\min}}{h\rho_{\max}}\cdot\ln\dfrac{\rho_{\max}}{\rho_{\min}}, & \dfrac{\Delta r\cdot\rho_{\min}}{h^2} \end{pmatrix} \tag{29}$$

Формула (29) дает ковариационную матрицу ошибок в плоскости одного из лучей. Пусть пара лучей ортогональна в горизонтальной проекции. В таком случае оценки горизонтальных компонент скорости вдоль лучей независимы, а оценка вертикальной скорости будет взвешенным средним по двум лучам. Оптимальные веса обратно пропорциональны дисперсиям

$$w_\perp^{(1)} = w\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha}\quad;\qquad w_\perp^{(2)} = w\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha}\quad,$$

где β - угол наклона зеркала антенны;

α - путевой угол первого луча.

Тогда веса

$$P_1 = \frac{\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha}}{\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha}+\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha}}\ ;$$

$$P_2 = \frac{\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha}}{\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha}+\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha}}\ .$$

При этом дисперсии компонент скорости:

– вдоль первого луча

$$\sigma_1^2 = \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{8NTLq^2}w\cdot\frac{\Delta r}{\rho_{\max}}\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha} \tag{30}$$

– вдоль второго луча

$$\sigma_2^2 = \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{8NTLq^2}w\cdot\frac{\Delta r}{\rho_{\max}}\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha} \tag{31}$$

– в вертикальном направлении

$$\sigma_n^2 = \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{8NTLq^2}w\frac{\Delta r\cdot\rho_{\min}}{h^2}\cdot\frac{\sqrt{\left(1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha\right)\cdot\left(1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha\right)}}{\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Sin^2\alpha}+\sqrt{1-Cos^2\beta\cdot Cos^2\alpha}} \tag{32}$$

При $\alpha = 45°$ и β - малом

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{16\sqrt{2}NTLq^2}w\frac{\Delta r}{\rho_{\max}} \tag{33}$$

$$\sigma_h^2 = \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{16\sqrt{2}\,NTLq^2} w \frac{\Delta r \cdot \rho_{\min}}{h^2} \tag{34}$$

Рассмотрим численный пример. Пусть

NT=1сек; w = 300 $^{м}/_{сек}$; Δr = 10 м; ρ_{max} =100 км; ρ_{min} = 10 км; h = 1км;   L = 1м ;   q = 1.
Получим

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\pi^{3/2}\cdot 2}{4\sqrt[4]{2}}\sqrt{300}\left(\frac{10}{10^5}\right)^{1/2} \approx 23 \ ^{см}/_{сек}.$$

При большом q

$$\sigma_1 = \sigma_2 \approx 0{,}1 \ ^{м}/_{сек}.$$

Заметим, что точность резко возрастает для луча, горизонтальная компонента которого направлена вдоль скорости. При этом $\alpha = 0$ и при малом β

$$\sigma^2 = \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{8NTLq^2}\cdot w\cdot\frac{\Delta r}{\rho_{\max}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\beta \quad = \quad \frac{\pi^{3/2}(1+q)^2}{8\sqrt{2}\ NTLq^2}\cdot\frac{\Delta r\cdot h}{\rho_{\max}^2}.$$

Точность оценки возрастает в $\sim\sqrt{\dfrac{h}{\rho_{\max}}}$, т.е. в прежних численных значениях до *1÷2* $^{см}/_{се}$.

Для ошибки вертикальной скорости

$$\sigma_h = \sigma_1\cdot\frac{\rho_{\max}\cdot\rho_{\min}}{h^2}.$$

Результат естественен. При настильном зондировании РЛС может точно измерять горизонтальные компоненты скорости и очень плохо – вертикальную компоненту. Из полученных формул следует, что потенциальная точность измерения путевой скорости высока. Однако при этом не учитывались погрешности, обусловленные рядом плохо контролируемых факторов. К ним относятся – нестабильность частоты излучения, неточность выставки лучей антенны относительно строительных осей самолета, неточность измерения углового положения самолета с помощью ИНС, неоднородность фона местности внутри физически разрешаемого элемента поверхности, флюктуация диэлектрической проницаемости воздуха, обусловленная турбулентностью, непостоянство скорости на интервале измерения и др.

$$\Delta w = \frac{c}{2}\cdot\frac{\Delta f}{f}$$

Современные синтезаторы частот обеспечивают относительную нестабильность 10^{-12}, откуда $\Delta w = 1{,}5\cdot 10^{-4}$ $^{м}/_{сек}$, т.е. очень малая величина. Значительно большую погрешность вносят угловые неточности. Так одноминутная погрешность в выставке луча антенны может дать погрешность до величины

$$w\cdot\Delta\alpha \approx 300\cdot\frac{1}{57\cdot 60} \approx 0{,}1 м/сек$$

Следует отметить, что ошибка в выставке лучей антенны является систематической и может быть откалибрована в полете сравнением с данными по скорости от спутниковой навигационной системы. Еще больших величин $2'\div 5'$ можно ожидать от ошибок ИНС. Однако угловые ошибки ИНС являются медленно меняющимися величинами, их неточность на протяжении этапа обнаружения, прицеливания и поражения может считаться постоянной. В

этом случае система координат является повернутой относительно географического трехгранника, но на точность решения тактической задачи это не сказывается. Остальные неконтролируемые факторы слабо влияют на точность измерения скорости.

Заключение

Обзорная РЛС может измерять радиальные компоненты скорости вдоль лучей с точностью единиц *см/сек* на интервале измерения в *1 сек.* Точность измерения вектора путевой скорости относительно строительных осей ограничивается точностью выставки биссектрис лучей. При погрешности выставки лучей в *1′* при путевой скорости 300 *м/сек*, погрешность составляет $\sim$ *0,1 м/сек*.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Авиационные радиолокационные комплексы и системы / П. И. Дудник [и др.] – М.: Изд. ВВИА им. проф. Н. Е. Жуковского, 2006. – 1112 с.
2. Справочник по радиолокации: кн. 1. / Под ред. М.И. Сколника: Пер. с англ. под общ. ред. В. С. Вербы.– М.: Техносфера, 2015. – 672 с.
3. Применение цифровой обработки сигналов: пер. с англ. / Под ред. Э. Опенгейма, пер. под ред. А. М. Рязанцева. – М.: Мир, 1980. – 550 с.
4. Kovregin V. N., Kovregina G. M., Murzaev A. S. A Unified Method for Observation of an Air Object with a Complex Spectrum in Radar with Quasi-Continuous Radiation // 29th Saint Petersburg International Conference on Integrated Navigation Systems, State Research Center of the Russian Federation Concern CSRI Elektropribor. – JSC, 2022. – P. 56-59.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Колосова Юлия Вячеславовна –
магистрант
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А
E-mail: juli.kolosova@yandex.ru

Коврегин Валерий Николаевич –
доцент, кандидат технических наук, старший научный сотрудник
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А
E-mail: kovregin@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Kolosova Yulia Vyacheslavovna –
master's student
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
67, Bolshaya Morskaia str., Saint-Petersburg, 190000, Russia
E-mail: juli.kolosova@yandex.ru

Kovregin Valery Nikolaevich –
Associate Professor, Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
67, Bolshaya Morskaia str., Saint-Petersburg, 190000, Russia
E-mail: kovregin@mail.ru