УДК 656.02 DOI: 10.31799/2077-5687-2024-1-37-42

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПТИМИЗАЦИИ МАРШРУТА В ЗАДАЧЕ КОММИВОЯЖЕРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АЛГОРИТМА ФЛОЙДА

Е. С. Костин
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения

В научной статье проводится исследование эффективности алгоритма Флойда в решении задачи коммивояжера, классической задачи комбинаторной оптимизации, основная идея которой заключается в поиске самого короткого маршрута, проходящего через определенный набор городов и возвращающегося в исходный город. Алгоритм Флойда, изначально разработанный для выявления кратчайших путей в графах, может быть применен для поиска оптимального маршрута в задаче коммивояжера с использованием матрицы расстояний между городами. В результате исследования показывается, что алгоритм Флойда демонстрирует хорошие результаты в решении задачи коммивояжера и может быть эффективным инструментом для оптимизации маршрутов. Представленные в статье результаты могут быть полезны для практических приложений в транспортной логистике, планировании маршрутов доставки и других областях, где требуется поиск оптимальных путей прохождения.
Ключевые слова: комбинаторная оптимизация, задача коммивояжера, алгоритм Флойда.

Для цитирования:
Костин, Е. С. Исследование оптимизации маршрута в задаче коммивояжера с использованием алгоритма Флойда / Е. С. Костин // Системный анализ и логистика. – 2024. – № 1(39). – с. 37 – 42. DOI: 10.31799/2077-5687-2024-1-37-42.

RESEARCH ON ROUTE OPTIMIZATION IN THE TRAVELING SALESMAN PROBLEM USING THE FLOYD'S ALGORITHM

E. S. Kostin
St. Petersburg State University of Aerospace Instrumentation

The scientific article examines the effectiveness of Floyd's algorithm in solving the traveling salesman problem, a classic combinatorial optimization problem whose main idea is to find the shortest route passing through a certain set of cities and returning to the original city. Floyd's algorithm, originally developed to identify shortest paths in graphs, can be applied to find the optimal route in the traveling salesman problem using a matrix of distances between cities. The study shows that Floyd's algorithm demonstrates good results in solving the traveling salesman problem and can be an effective tool for optimizing routes. The results presented in the article can be useful for practical applications in transport logistics, planning delivery routes and other areas where searching for optimal routes is required.
Keywords: combinatorial optimization, traveling salesman problem, Floyd's algorithm.

For citation:
Kostin, E. S. Research on route optimization in the traveling salesman problem using the Floyd's algorithm / E. S. Kostin // System analysis and logistics. – 2024. – № 1(39). – p. 37 – 42. DOI: 10.31799/2077-5687-2024-1-37-42.

Введение

Существует основной набор правил для осуществления работы логистики – правила 7R. Они гласят, что необходимо привезти товар в нужном количестве, времени, месте, необходимом качестве, нужному потребителю и с требуемым уровнем затрат [1]. Задача коммивояжера в свою очередь определяет, какой цикличный маршрут необходимо выбрать для того, чтобы пройти все опорные точки и вернуться в исходную точку с целью минимизации временных затрат и пройденного расстояния. Это классическая комбинаторная оптимизационная задача, которая включает в себя не только логистику, но и математику, информатику, транспортировку и многое другое.

Решение задачи коммивояжера напрямую влияет на экономические затраты, на эффективность процесса перевозки в целом и на использование ресурсов для достижения нужной цели, что делает её актуальной и востребованной в любое время. В связи с этим, изучение алгоритмов решения задачи коммивояжера дает представление о том, как устроена логистика в общем виде, какие методы применяются и каким образом достигается перевозка груза с минимальными затратами. Для решения задачи коммивояжера используют множество алгоритмов, некоторые из них уже не являются столь актуальными из-за низкой эффективности с учетом временных затрат. К основным методам на сегодняшний день можно смело отнести: различные переборы, метод ближайшего соседа, метод ветвей и границ. Также выделяют специальные алгоритмы: муравьиный, генетический, динамического программирования и, как следствие, алгоритм Флойда, который и рассматривается в данной статье.

Алгоритм Флойда (также известен, как алгоритм Флойда – Уоршелла) – это метод нахождения кратчайшего маршрута между вершинами взвешенного графа, для этого используется динамическое программирование. Данный алгоритм впервые был упомянут уже в 1962 году в статьях Роберта Флойда и Стивена Уоршелла [2].

Описание задачи коммивояжера

Задача коммивояжера – это классическая логистическая проблема, включающая в себя комбинаторную оптимизацию. Именно с помощью этой задачи производится планирование маршрута для доставки груза, а также для решения задач самой транспортной логистики. Другими словами, можно сказать, что любая оптимизация пути прохождения груза из начальной точки в конечную – это и есть задача коммивояжера.

Один из наиболее простых и распространенных примеров применения задачи коммивояжера – это оптимизация маршрута по доставке грузов. Создадим простейшую модель задачи (рисунок 1), в которой обозначим 6 опорных пунктов, которые необходимо посетить. Между каждыми пунктами имеется заданное расстояние, которое нужно преодолеть. Основная задача – минимизация данного расстояния, то есть необходимо, начиная с начальной точки A, обойти все необходимые точки и вернуться в начало. Для конкретной задачи наилучшим маршрутом будет путь «A-B-C-D-E-F-A», который равен 114 [3].

В связи с тем, что данная задача имеет минимальное количество вариаций маршрута, решение можно найти без использования каких-либо алгоритмов. Иными словами, эту задачу можно решить вручную, но стоит учитывать, что данный способ не будет гарантировать оптимального решения. Однако, как правило, задача коммивояжера выглядит намного сложнее и требует использования определенных закономерностей и математических вычислений, в частности, использование программного кода с рассмотрением всех возможных маршрутов перемещения. В целях упрощения понимания работы алгоритма Флойда задача коммивояжера в данной научной статье не будет усложнена.

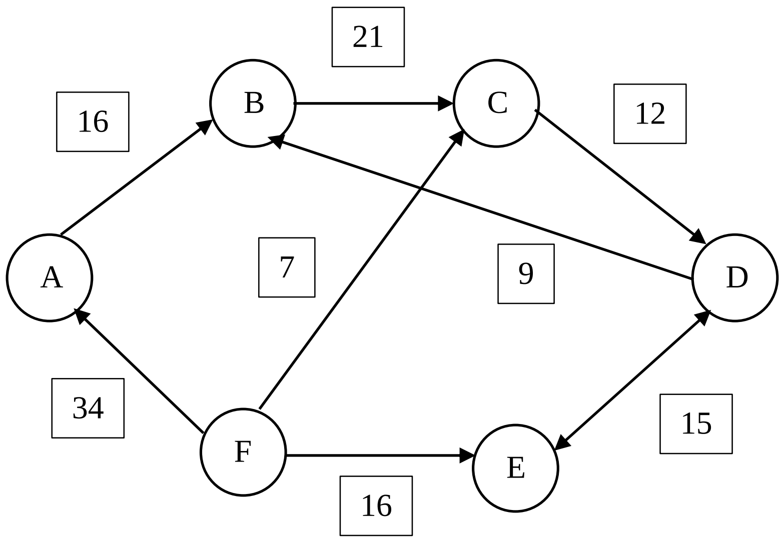

Рис. 1. Простейшая модель задачи коммивояжера

Математическая модель задачи коммивояжера

Математическая модель задачи коммивояжера представляет собой целевую функцию, записанная в виде (1), согласно которой сумма всех перемещений между опорными точками должна быть сведена к минимуму.

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=0}^{n} c_{ijk}x_{ijk} \to \min. \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_{ijk} = 1,\ j = 1,\dots,m, & (2) \\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+1} xi_{jk} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+1} x_{kji},\ k = 0,\dots,n, & (3) \\ \sum_{j=1}^{m+1}\sum_{k=0}^{n} x_{0jk} = p, & (4) \\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{m+1} x_{0ij} = p. & (5) \end{cases}$$

Также у математической модели существует набор ограничений, формула (2) сообщает, что к каждому определенному пункту можно приехать и уехать только один раз, причем это условие не работает на фиктивные пункты. Ограничение, записанное формулой (3), указывает на то, что количество приехавших объектов к пункту должно быть равно количеству уехавших из него же.

Ограничения (4) и (5) повторяют ранее описанное ограничение (3), но также указывают на точное количество посещений фиктивного пункта. Важно отметить, что одно из них будет избыточным из-за ограничения (3) [4].

Также существуют дополнительные ограничения, которые накладываются на математическую модель задачи коммивояжера, однако в рамках данной статьи они будут избыточны и использоваться не будут.

Описание работы алгоритма Флойда

Алгоритм Флойда построен на основе динамического программирования, он наиболее эффективен для поиска маршрута во взвешенном графе, когда все рёбра имеют направления [5]. Строго говоря, основная идея заключается в разбиении задачи на небольшие подзадачи, далее производится их решение и при объединении всех полученных данных выдается финальное решение задачи. Алгоритм также используют с положительными и отрицательными весами рёбер, поэтому его смело можно назвать универсальным и удобным для применения.

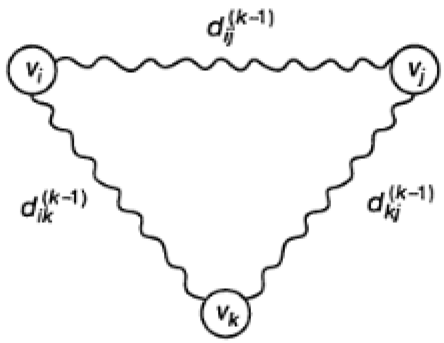

Рис. 2. Основа работы алгоритма Флойда

Длина наиболее короткого пути от v_i до v_k из всех, которые не используют промежуточные вершины с номерами больше $k-1$ равна $d_{ik}^{(k-1)}$, длина кратчайшего пути от v_k до v_j с номерами не больше $k-1$ равна $d_{kj}^{(k-1)}$, по аналогии длина пути от v_i к v_j через вершину v_k равна $d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}$. В совокупности получаем рекурсивное соотношение [6]:

$$d_{ij}^{k} = \min\left\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right\} \text{ для } k \geq 1, d_{ij}^{(0)} = w_{ij}.$$

Также важно учесть, что эффективность алгоритма Флойда по времени принимает кубическое значение, то есть [7]:

$$\theta = \left(|V|^3\right).$$

Программный код в первом приближении будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{array}{l} for\ k \leftarrow 1\ to\ n\ do \\ \quad for\ i \leftarrow 1\ to\ n\ do \\ \quad\quad for\ j \leftarrow 1\ to\ n\ do \\ \quad\quad\quad D[i,j] \leftarrow \min\{D[i,j], D[i,k] + D[k,j]\} \\ return\ D \end{array}$$

Пример решения задачи коммивояжера с применением алгоритма Флойда

Для начала создадим начальное условие. У нас имеется 4 вершин графа, согласно задаче коммивояжера, необходимо посетить все вершины хотя бы один раз и оптимизировать данное перемещение. Одно из решений данной задачи – это маршрут «А-Б-В-А-Г-А», полученное расстояние выйдет 20+5+15+5+25+15=85.

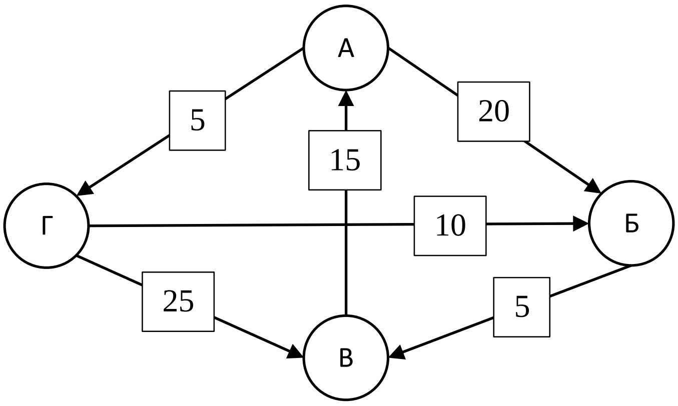

Рис. 3. Исходные условия задачи коммивояжера

Изобразим матрицу смежности D_0. На данный момент большинство передвижений между вершинами отсутствуют (помечено знаком бесконечности).

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & \infty & 5 \\ \infty & 0 & 5 & \infty \\ 15 & \infty & 0 & \infty \\ \infty & 10 & 25 & 0 \end{bmatrix}$$

Теперь проведем первый цикл работы алгоритма Флойда. Для этого создадим новый маршрут: из вершины «А» в вершину «В». Для этого воспользуемся дополнительной вершиной «Б». Таким образом, у нас получится маршрут «А-Б-В», который равен 20+5=25. Запишем это значение в обновленную матрицу смежности. Также сделаем новый маршрут из вершины «В» в вершину «Б». Для этого организуем передвижение «В-А-Б», расстояние которого примем как 15+20=35 и также запишем это в новую матрицу D_1.

$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 20 & 25 & 5 \\ 20 & 0 & 5 & 25 \\ 15 & 35 & 0 & 20 \\ 30 & 10 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

Продолжим совершать итерацию. Если изначально маршрут из вершины «А» в «Б» равен 20, то теперь мы можем создать новый, более короткий путь, который будет проходить через вершины «А» и «Б», для этого необходимо пройти маршрут «А-Г-Б», что в сумме будет равно 5+10=15 вместо изначального 20. Произведем такой цикл для каждого возможного маршрута и получим новую матрицу смежности D_2.

$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 15 & 20 & 5 \\ 20 & 0 & 5 & 25 \\ 15 & 30 & 0 & 20 \\ 30 & 10 & 15 & 0 \end{bmatrix}$$

В итоге мы получили новую матрицу смежности, с помощью которой возможно совершить перемещение из любой вершины. Решим данную задачу и найдем минимально возможное расстояние. Кратчайший путь составит маршрут: «А-Г-Б-В-А», что численно равно 35. Таким образом, нам удалось сократить перемещение коммивояжера на 50, таким образом, задача была оптимизирована и было найдено оптимальное решение.

Заключение

В научной статье удалось изучить задачу коммивояжера и сформулировать её математическую модель в общем виде. Также был изучен алгоритм Флойда – Уоршелла и именно благодаря методам динамического программирования получилось произвести решение задачи коммивояжера. Стоит заметить, что данный метод позволил создать ранее невозможные маршруты и оптимизировать путь, сократив время передвижения коммивояжера. Данный алгоритм отлично подходит для решения данной задачи из-за его простоты использования и эффективности применения для взвешенного графа.

Пусть алгоритм Флойда – Уоршелла не является оптимальным решением и уступает прочим методам решения задачи коммивояжера, однако в условиях небольшого количества вершин этот алгоритм показал себя хорошо, а это значит, что нельзя его исключать в

принципе. Это классический метод решения задач теории графов, поэтому он прекрасно дает понимание, как работает данный алгоритм в целом.

На сегодняшний день видно активное изучение алгоритма Флойда для новых методов планирования траектории и генерации начальной траектории, что крайне важно для, например, совместного патрулирования нескольких БАС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селезнёва, Т. О. Основы логистики: учебное пособие / Селезнёва Т. О., Лилимберг С.И., Панина Г. В. // Костанай: Костанайский филиал ФГБОУ ВО «ЧелГУ», 2021. – 116 с.
2. Habr.com: Алгоритм Флойда — Уоршелла [Электронный ресурс]. – URL: https://habr.com/ru/articles/105825/ (дата обращения: 04.02.2024).
3. Костин, Е. С. Особенности решения задачи коммивояжера при помощи генетического алгоритма / Е. С. Костин // Системный анализ и логистика. – 2023. – № 3(37). – с. 91 – 96. DOI: 10.31799/2077-5687-2023-3-91-96.
4. Медведев, С. Н. Математическая модель и алгоритм решения задачи маршрутизации транспортных средств с несколькими центрами с чередованием и единым местом сбора / С. Н. Медведев //Вестник ВГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии, – 2021. –№ 1 – С. 21-32.
5. Berkeley.edu. Lecture Notes for IEOR 266: Graph Algorithms and Network Flows. Department of Industrial Engineering and Operations Research [Электронный ресурс]. – URL: https://hochbaum.ieor.berkeley.edu/files/ieor266-2014.pdf (дата обращения: 04.02.2024).
6. Кормен, Т. Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн – Издательство: Диалектика, 2020. – 1328 с. ISBN 978-5-907114-11-1.
7. Левитин А. Алгоритмы: введение в разработку и анализ. / А. Левитин – М.: Издательский дом "Вильямс", 2006. – 576 с.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Костин Егор Сергеевич –
Студент
Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения
190000, Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67, лит. А
E-mail: egorik8993@mail.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHOR

Kostin Egor Sergeevich –
student
Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation
67, Bolshaya Morskaia str., Saint-Petersburg, 190000, Russia
E-mail: egorik8993@mail.ru