УДК 517.977.5 DOI: 10.31799/2077-5687-2025-1-19-32

УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА НА КРУГОВОЙ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ОРБИТЕ

М. Б. Алесов
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро»

Рассматривается задача синтеза управления траекторным движением летательного аппарата (ЛА) при непосредственном наведении на круговую горизонтальную орбиту и стабилизация движения на ней. Основным способом решения является предварительное задание эталонного описания разности текущей радиальной дальности ЛА и заданного радиуса орбиты в рамках метода обратной задачи динамики. Используются уравнения горизонтального движения ЛА в полярной системе координат. Для учёта ограничения функции управления (угла крена) применяется нелинейное звено непосредственного «насыщения». Представлены численные примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА, иллюстрирующие работоспособность описанных алгоритмов.

Ключевые слова: синтез траекторного управления летательными аппаратами, полярная система координат, метод обратной задачи динамики, ограничение функции управления.

Для цитирования:
Алесов, М. Б. Управление движением летательного аппарата на круговой горизонтальной орбите / М. Б. Алесов // Системный анализ и логистика. – 2025. – № 1(44). – с. 19-32. DOI: 10.31799/2077-5687-2025-1-19-32.

Введение

Выведение летательного аппарата (ЛА) на круговую горизонтальную орбиту и обеспечение последующего движения по ней с приемлемой точностью является одной из важных воздушных операций бортового пилотажно-навигационного обеспечения ЛА. Следует отметить, что среди двадцати трёх стандартных типовых участков, используемых для кодирования процедур маневрирования согласно спецификации ARINC 424 "Navigation system data base», по крайней мере четыре (FD, CD, VD, RF) предполагают движение по круговой горизонтальной орбите с сохранением дальности до места расположения наземной станции дальномерного оборудования (DME) или до указанной навигационной точки – центра орбиты. Кроме того, поисковые манёвры часто включают процедуру облёта некоторого участка на заданной высоте.

Поскольку основным позиционным параметром, используемым для выведения ЛА, является радиальная дальность, то представляется обоснованным использование полярной системы координат при описании горизонтального движения ЛА. Если, к тому же, центральная точка орбиты совпадает с положением VOR и/или DME маяка, то полярные координаты (радиальная дальность, полярный угол – азимут на ЛА) являются не только навигационными комплексными, но и измеряемыми текущими характеристиками положения ЛА.

Данная работа решает задачу наведения ЛА и последующего регулирования движения на орбите, учитывая значительные линейные отклонения ЛА от целевой орбиты и постоянное ветровое воздействие. При синтезе управления применяется метод обратной задачи динамики с учётом ограничения на величину функции управления, при этом в качестве параметра управления используется значение угла крена ЛА.

Вопросы синтеза управления динамическими системами методом обратной задачи без учёта ограничений на управление изложены в работах Бойчука Л.М. [1], Крутько П.Д. [2], Фурунжиева Р.И. и др. [3]. Способы учёта ограничений при синтезе управления рассмотрены в работах Колесникова А.А. [4], Павловского В.Е., Савицкого А.В. [5].

1. Задача траекторного управления и модель движения ЛА

При описании движения ЛА и задании характеристик управления используется локальная (топоцентрическая) полярная система координат.

Локальная полярная система координат располагается в центре орбиты (ЦО) и образована осью увеличения горизонтальной дальности R (радиальным лучом, радиалом) и осью увеличения полярного угла ζ (положительное направление отсчёта угла – по часовой стрелке от направления на север). Текущее положение ЛА в полярной системе координат определяется координатами (R, ζ) – радиальной дальностью и полярным углом. Характеристикой направления ЛА является относительный полярный угол курса A, отсчитываемый от текущего радиала с положительным направлением по часовой стрелке.

На рисунке **1** показаны переменные состояния, используемые при описании движения ЛА в полярной системе координат. Радиус орбиты обозначен символом R_0. Вектор воздушной скорости ЛА и вектор скорости ветра обозначены соответственно, как $\vec{V}$, $\vec{U}$.

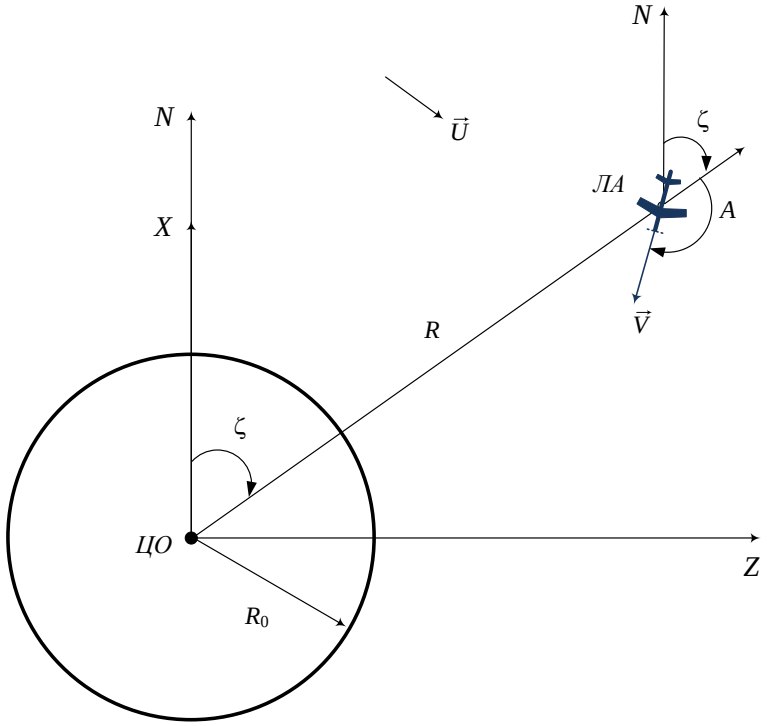

Рис. 1. Используемая система координат и характеристики положения ЛА

Движение ЛА в полярных координатах относительно центральной точки орбиты описывается системой трёх дифференциальных уравнений с переменными состояния R, ζ и A:

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = V\cos A + U_R, \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}t} = \frac{V}{R}\sin A + \frac{U_\zeta}{R}, \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{V}\operatorname{tg}\gamma - \frac{V}{R}\sin A - \frac{U_\zeta}{R}, \tag{1}$$

где R – горизонтальная (радиальная) дальность до ЛА от центра системы, м; t – время, с; V – истинная воздушная скорость ЛА, м/с; ζ – текущий полярный угол расположения ЛА, радианы; A – относительный угол курса ЛА, радианы; U_R, U_ζ – радиальная и тангенциальная составляющие скорости ветра соответственно, м/с; g – ускорение свободного падения, м/с^2; γ – угол крена ЛА, радианы.

Замена переменных

$$\frac{t\,g}{V} = \tau, \quad r = R\frac{g}{V^2}, \quad r_0 = R_0\frac{g}{V^2}, \quad u_r = \frac{U_R}{V}, \quad u_\zeta = \frac{U_\zeta}{V}, \tag{2}$$

приводит модель движения (1) к следующей системе нормированных уравнений

относительно безразмерных переменных:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = \cos A + u_r, \quad \frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{r}\sin A + \frac{u_\zeta}{r}, \quad \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} = \sigma - \frac{1}{r}\sin A - \frac{u_\zeta}{r}, \tag{3}$$

где r, ζ, A – переменные состояния (нормированное безразмерное радиальное отклонение, полярный угол положения и относительный угол курса); τ – переменная времени; u_r, u_ζ –радиальная и тангенциальная составляющие ветра; $\sigma = \tan\gamma$ – функция управления.

Если по условиям задачи конечная точка на орбите, определяемая полярным углом ζ, не фиксируется, то второе уравнение системы (3) не принимается во внимание при построении траектории выведения. Кроме того, первое и третье уравнения образуют замкнутую систему дифференциальных уравнений и после их решения полярный угол из второго уравнения системы может быть рассчитана интегрированием.

На функцию управления (тангенс угла крена) накладывается постоянное ограничение по величине

$$|\sigma(t)| \le \sigma_0, \tag{4}$$

где $\sigma_0 = \mathrm{tg}\,\gamma_0$ – заданное максимальное значение функции управления; γ_0 – максимально допустимое значение угла крена при манёвре.

Для непосредственного ограничения управления используется нелинейный элемент «насыщение» с симметричным ограничением $\sigma_0 > 0$ вида

$$G_{\sigma_0}(\sigma) = \begin{cases} \sigma, & |\sigma| \le \sigma_0, \\ \sigma_0\,\mathrm{sign}(\sigma), & |\sigma| > \sigma_0, \end{cases} \tag{5}$$

или его гладкие тригонометрические и гиперболические аппроксимации

$$G^{(1)}_{\sigma_0}(\sigma) = \frac{2\sigma_0}{\pi}\,\mathrm{arctg}(b\sigma), \quad G^{(2)}_{\sigma_0}(\sigma) = \sigma_0\,\mathrm{th}(b\sigma), \tag{6}$$

где b – параметр крутизны функции.

Таким образом, решаемая задача заключается в синтезе управления объектом, движение которого описывается уравнениями (1), (3), для перемещения из точки пространства состояния (R, ζ, A) в конечную точку со значением радиальной дальности $R = R_0$, где R_0 – радиус целевой орбиты (нормированное безразмерное значение r_0). При этом в качестве функции управления используется ограниченное значение угла крена (4), а разность требуемой r_0 и текущей r дальности должна удовлетворять дифференциальному уравнению $E[r_0 - r(\sigma)] = 0$, структура которого будет рассмотрена далее.

В частным случае при $r_0 \to 0$ задача вырождается в процедуру наведения ЛА на навигационную точку по текущей дальности r.

2. Синтез функции управления

В соответствии с методом обратной задачи динамики управление определяется исходя из требования минимизации эталонного уравнения разности, требуемого и текущего состояний системы, при этом функционал качества управления записывается как [8]

$$J(\sigma) = \frac{1}{2}\{E_n[r_0 - r(\sigma)]\}^2 \underset{|\sigma|\le\sigma_0}{\to} \min, \tag{7}$$

где r_0 – нормированный радиус целевой орбиты; $r(\tau;\sigma)$ – функция текущей дальности до ЛА; $E_n(\Delta r)$ – дифференциальное эталонное выражение *n*-го порядка вида

$$E_n(\Delta r) = \frac{\mathrm{d}^n \Delta r}{\mathrm{d}\tau^n} + \sum_{j=0}^{n-1} a_j \frac{\mathrm{d}^j \Delta r}{\mathrm{d}\tau^j}; \tag{8}$$

$\Delta r(\tau) = r_0 - r(\tau;\sigma)$ – разность радиуса орбиты и текущей дальности; a_j – коэффициенты линейного дифференциального выражения ($j = 0, \ldots, n-1$).

В рассматриваемой задаче ограничимся эталонным выражением второго порядка ($n = 2$), тогда дифференциальное выражение (8) имеет вид

$$E_2(\Delta r) = \frac{\mathrm{d}^2 \Delta r}{\mathrm{d}\tau^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}\Delta r}{\mathrm{d}\tau} + a_0 \Delta r\,. \tag{9}$$

Для построения эталонного уравнения (9) удобно воспользоваться способом задания характеристического уравнения, например, по характеристическому уравнению вида

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0,$$

которому соответствует дифференциальное уравнение

$$E_2(\Delta r) = \frac{\mathrm{d}^2 \Delta r}{\mathrm{d}\tau^2} - (\lambda_1 + \lambda_2)\frac{\mathrm{d}\Delta r}{\mathrm{d}\tau} + \lambda_1 \lambda_2 \Delta r = 0,$$

где λ_1, λ_2 – корни характеристического уравнения, причём для устойчивости процесса необходимо выполнение условий $\mathrm{Re}(\lambda_1) < 0$, $\mathrm{Re}(\lambda_2) < 0$.

Для выбора параметров схемы a_1, a_0 последуем рекомендациям [7]

$$a_0 = \Omega_0^2, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\pi^2}{c^2} + \dfrac{1}{4}}}\sqrt{a_0}, \tag{10}$$

где Ω_0 – заданный среднегеометрический корень, характеризующий быстроту протекания переходных процессов; c – параметр отношения вещественной и мнимой части корня, равный $c = \ln\dfrac{1}{1-\eta}$; η – степень затухания переходного процесса за один период ($\eta = 95\,\%$).

Продифференцируем первое уравнение системы (3), в результате получим

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} = -\sin A\left(\sigma - \frac{1}{r}\sin A - \frac{u_\zeta}{r}\right) + \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau}, \tag{11}$$

где производная радиальной скорости ветра равна

$$\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau} = u_\zeta \left(\frac{1}{r}\sin A + \frac{u_\zeta}{r}\right) . \qquad (12)$$

Критерий качества (7) запишется в виде

$$J(\sigma) = \frac{1}{2}\left[\sin A\left(\sigma - \frac{1}{r}\sin A - \frac{u_\zeta}{r}\right) - \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau} - a_1(\cos A + u_r) + a_0(r_0 - r)\right]^2 \underset{|\sigma|\le\sigma_0}{\to} \min , \qquad (13)$$

причём функция управления σ входит в выражение аргумента квадратичной функции линейно. В этом случае минимальное значение критерия (13) с учётом ограничения (4) достигается при управлении

$$\sigma(t) = G_{\sigma_0}\left(\frac{\sin A + u_\zeta}{r} + \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\sin A} + \frac{a_1}{\sin A}(\cos A + u_r) - \frac{a_0}{\sin A}(r_0 - r)\right). \qquad (14)$$

Первое слагаемое функции управления обеспечивает тангенциальное движение вдоль орбиты, причём в предельном случае при $r = r_0$ движение по орбите выполняется с углом крена, определяемым этим выражением. Второе слагаемое учитывает изменение радиальной составляющей скорости ветра. Третье слагаемое демпфирует радиальные отклонения от целевой орбиты. Последнее слагаемое реализует пропорциональный закон управления по дальности с учётом знака относительного угла курса *A*.

Необходимо отметить, что полученное выражение функции управления (14) имеет особый случай при относительном угле курса $\sin A \approx 0$: $A \approx 0$ (начальное положение ЛА внутри орбиты), $A \approx \pm\pi$ (ЛА снаружи орбиты). При этом величина управления возрастает до максимального по модулю значения и при изменении знака относительного угла курса резко «перескакивает» на максимальное по модулю значение противоположного знака.

Для выполнения управления в этом случае следует выделить особую область в виде конъюнкции условий:

$$|\sin A + u_\zeta| < \sin A' \text{ и } |\sigma| = \sigma_0 , \qquad (15)$$

где A' – допустимое значение относительного угла курса, выбираемое из необходимого условия $\sin A' \le \dfrac{r_0}{\sqrt{r^2 + r_0^2}}$.

Непосредственно в особой зоне следует использовать путевой тип управления, например, вида

$$\hat{\sigma}(\tau) = G_{\sigma_0}\left(\frac{\alpha - \sin A - u_\zeta}{r}\right), \qquad (16)$$

где $\alpha = \nu \sin A'$ – синус угла вывода на орбиту; ν – знак ориентации орбиты, имеющий значения ±1, знак «+» соответствует движению по орбите с правым креном, «–» – с левым креном.

Если имеются измеряемые значения скорости относительного полярного угла $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}$, то производная радиальной скорости ветра (12) запишется в виде

$$\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau} = u_\zeta(\sigma - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau}) \,. \tag{17}$$

В таком случае выражение функции управления определяется как

$$\sigma(\tau) = G_{\sigma_0}\left(\frac{1}{\sin A - u_\zeta}\left[\frac{\sin A\ (\sin A + u_\zeta)}{r} - \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} u_\zeta + a_1(\cos A + u_r) - a_0(r_0 - r) \right] \right). \tag{18}$$

В особом случае, когда $\sin A - u_\zeta \approx 0$, управление может быть записано аналогично формуле (16).

Для улучшения переходного процесса рекомендуется уменьшать коэффициент затухания в условиях значительной дальности, используя вместо эталонного уравнения (9) нелинейное уравнение Дж. Льюиса с корректирующим дифференциальным членом [3]

$$\frac{\mathrm{d}^2 \Delta r}{\mathrm{d}\tau^2} + a_1\,[1 - G_m(\mu\,|\,\Delta r\,|)]\frac{\mathrm{d}\Delta r}{\mathrm{d}\tau} + a_0\,\Delta r = 0\,, \tag{19}$$

где μ – коэффициент уменьшения затухания ($\mu \geq 0$); m – относительная величина наименьшего значения коэффициента демпфирования ($0 < m < 1$).

В этом случае функция управления (14) запишется как

$$\sigma(\tau) = G_{\sigma_0}\left(\frac{\sin A + u_\zeta}{r} + \frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau}\frac{1}{\sin A} + \frac{\tilde{a}_1}{\sin A}(\cos A + u_r) - \frac{a_0}{\sin A}(r_0 - r) \right), \tag{20}$$

где $\tilde{a}_1$ – функция-коэффициент, зависящая от отклонения по дальности как $\tilde{a}_1 = a_1\,\{1 - G_m[\mu\,(r_0 - r)]\}$.

3. Расчёт исходных данных для управления

Характеристиками, используемыми для описания движения ЛА и синтеза управления, являются: текущая радиальная дальность ЛА r, полярный угол положения ЛА ζ, относительный угол курса A, соответствующие полярные компоненты скорости ветра u_r, u_ζ.

Расчёт координат положения выполняется по текущим прямоугольным координатам ЛА относительно центра орбиты. Бортовая навигационная система ЛА обеспечивает потребителей и, в частности, систему траекторного управления текущими геодезическими координатами ЛА на общеземном эллипсоиде.

Прямоугольная система координат (NUE) располагается в центральной точке орбиты с геодезическими координатами (φ0, λ0) и заданной высотой, ось X направлена по меридиану на север (*N*), ось *Y* – нормально к эллипсоиду вверх (*Up*), ось *Z* – на восток (*E*), дополняя систему до правой. Текущее горизонтальное положение ЛА в прямоугольной системе координат определяется координатами (*X*, Z). Метод расчёта прямоугольных координат ЛА *X*, *Z* в топоцентрической прямоугольной системе координат по геодезическим координатам дан в ГОСТ 51794-2008 «Методы преобразования координат определяемых точек».

Полярные текущие координаты ЛА рассчитываются по формулам:

$$r = \sqrt{x^2 + z^2}\,, \quad \zeta = \operatorname{arctg}\frac{z}{x}\,, \tag{21}$$

где x, z – нормированные прямоугольные координаты «север - восток»

$$x = X\,\frac{g}{V^2}\,, \quad z = Z\,\frac{g}{V^2}\,.$$

Здесь функция арктангенса имеет область значений во всём диапазоне изменения полярного угла (–π, π] и учитывает знаки числителя и знаменателя входного аргумента.

При значительном расстоянии от ЛА до центра орбиты полярные координаты могут быть определены по формулам обратной геодезической задачи сферической тригонометрии

$$\cos S = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)\,, \quad r = S\,R_3\,\frac{g}{V^2}\,,$$
$$\tan\zeta = \frac{\cos\varphi \sin(\lambda - \lambda_0)}{\cos\varphi_0 \sin\varphi - \sin\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda - \lambda_0)}\,, \tag{22}$$

где (φ_0, λ_0) – геодезические координаты центра орбиты, радианы; (φ, λ) – текущие геодезические координаты ЛА, радианы; R_3 – средний радиус Земли (6371 км).

При повышенных требованиях к точности допустимо определять требуемое значение дальности на сфероиде по формулам Каврайского В.В., Гаусса К.Ф., Бесселя Ф.В., Vincenty T. [8].

При формировании сигнала управления используются текущие комплексные значения угла курса ЛА ψ, непосредственно предоставляемые бортовым пилотажно-навигационным комплексом ЛА. При этом значение текущего относительного угла курса рассчитывается как

$$A = \psi - \operatorname{arctg}\frac{z}{x}\,. \tag{23}$$

Скорость изменения текущего относительного угла курса вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\tau} = \tilde{\omega}_y - \left(w_z\,\frac{x}{x^2 + z^2} - w_x\,\frac{z}{x^2 + z^2}\right), \tag{24}$$

где $\tilde{\omega}_y$ – нормированная угловая скорость изменения курса, равная

$$\tilde{\omega}_y = \omega_y\,\frac{V}{g}\,;$$

ω_y – угловая скорость изменения курса, определяемая курсовой системой ЛА, рад/с; w_x, w_z – нормированные компоненты путевой скорости ЛА

$$w_x = \frac{W_X}{V}\,, \quad w_z = \frac{W_Z}{V}\,,$$

W_X, W_Z – компоненты путевой скорости ЛА, определяемые навигационной системой ЛА, м/с.

Обычно вектор скорости ветра $\vec{U}$ задаётся своей величиной (модулем) U и

метеорологическим направлением ветра (угол ветра) $\psi_{\text{В}}$. Нормированные компоненты скорости ветра для уравнений движения (3) рассчитываются как

$$u_x = -u\cos\psi_{\text{В}}, \quad u_z = -u\sin\psi_{\text{В}};$$
$$u_r = u_x\cos\zeta + u_z\sin\zeta, \quad u_\zeta = u_z\cos\zeta - u_x\sin\zeta. \tag{25}$$

где u – нормированная скорость ветра, аналогично формулам нормирования скорости (2).

Производная радиальной скорости ветра вычисляется по формуле

$$\frac{\mathrm{d}u_r}{\mathrm{d}\tau} = (-u_x\sin\zeta + u_z\cos\zeta)\left(\frac{1}{r}\sin A + \frac{u_\zeta}{r}\right). \tag{26}$$

4. Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры синтеза управления и построения траектории выведения ЛА на горизонтальную орбиту.

Примем, что воздушная скорость ЛА равна V = 200 км/час = 55,56 м/с. Нормированные безразмерные значения переменных модели согласно (2) записываются как

$$\tau = 0{,}18\,t, \quad r = 3{,}18\,R,$$

где радиальная дальность R измеряется в километрах, а время t – в секундах.

Радиус целевой орбиты равен $R_0 = 5$ км, нормированное значение $r_0 = 15{,}89$. Северная и восточная составляющие скорости ветра U_X = – 10 м/с, U_Z = 10 м/с, или u_x = – 0,18, u_z = 0,18. Радиус разворота для принятого максимального угла крена $\gamma_0 = 30^0$ равен $R' = \dfrac{V^2}{g\,\mathrm{tg}\,\gamma_0} = 545$ м, или нормированное значение $r' = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\gamma_0} = 1{,}73$. Для обеспечения вывода на орбиту должно выполняться условие $R_0 > R'$, $r_0 > r'$.

Максимально допустимому значению угла крена $\gamma_0 = 30^0$ соответствует максимальное значение управления $\sigma_0 = \mathrm{tg}\,\gamma_0 = 0{,}58$. В качестве параметров эталонного выражения (9) приняты значения коэффициентов: a_0 = 0,1; a_1 = 0,86.

Рассмотрим движение ЛА из двух начальных точек: снаружи и изнутри орбиты. Точка начала процесса выведения, находящаяся снаружи орбиты (внешняя точка орбиты), имеет полярные координаты $R(0) = 7$ км, $\zeta(0) = \dfrac{\pi}{4}$ или $r(0) = 22{,}26$, а начальный относительный угол курса ЛА равен $A(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Точка начала выведения, находящаяся внутри орбиты (внутренняя точка), имеет полярные координаты $R(0) = 4$ км, $\zeta(0) = \dfrac{\pi}{4}$ или $r(0) = 12{,}73$, а начальный относительный угол курса ЛА равен $A(0) = \dfrac{\pi}{2}$. Движение по орбите выполняется по часовой стрелке, с правым углом крена.

Рассматривается моделирование численным методом Рунге-Кутты траекторного движения ЛА по формулам (3). На рисунке 2 показаны полученные траектории движения ЛА

в полярных координатах (r, ζ) при выводе на орбиту с радиусом r_0 из начальных точек (НТ), расположенных снаружи и внутри орбиты.

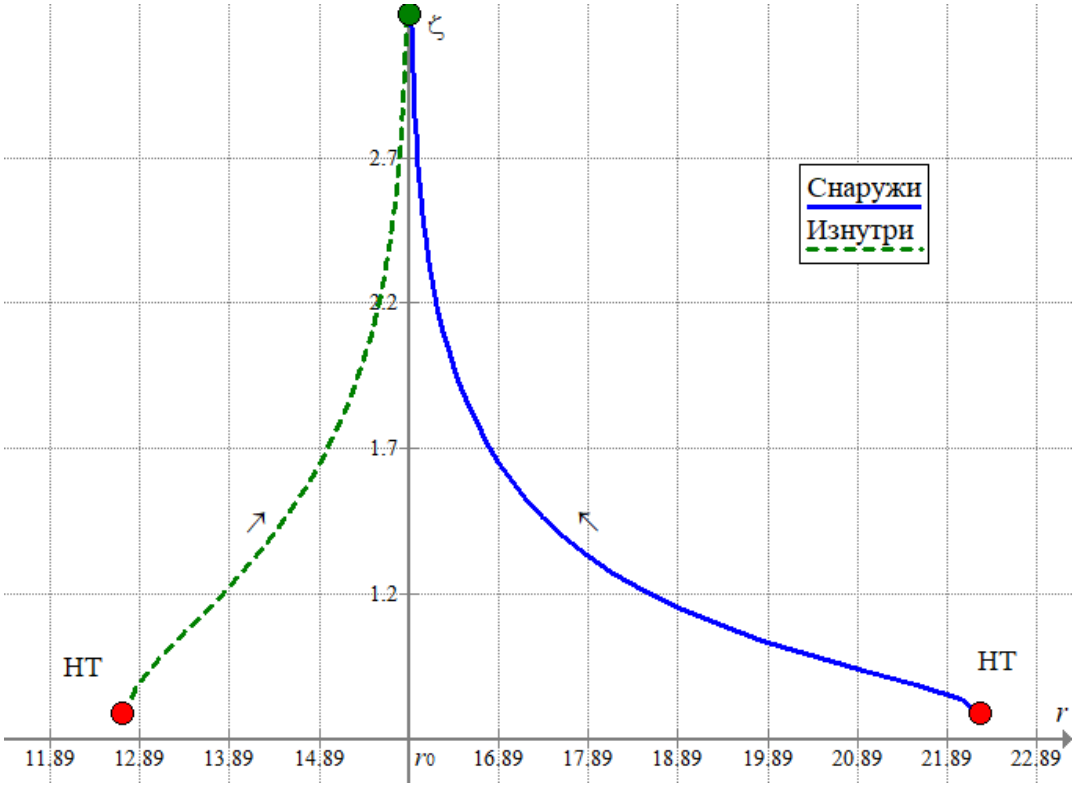

Рис. 2. Траектории наведения в полярных координатах (r, ζ)

Переходные процессы фазовых переменных модели движения: полярных координат $r(\tau)$, $\zeta(\tau)$ и относительного угла курса $A(\tau)$, в процессе наведения показаны на рисунках **3, 4, 5** соответственно.

Функции радиальной дальности $r(\tau)$, представленные на рисунке **3**, имеют экспоненциальную зависимость от времени с асимптотой $r(\tau) \to r_0$. Длительность непосредственного процесса выведения ЛА снаружи и изнутри орбиты составила около 35 (194 с).

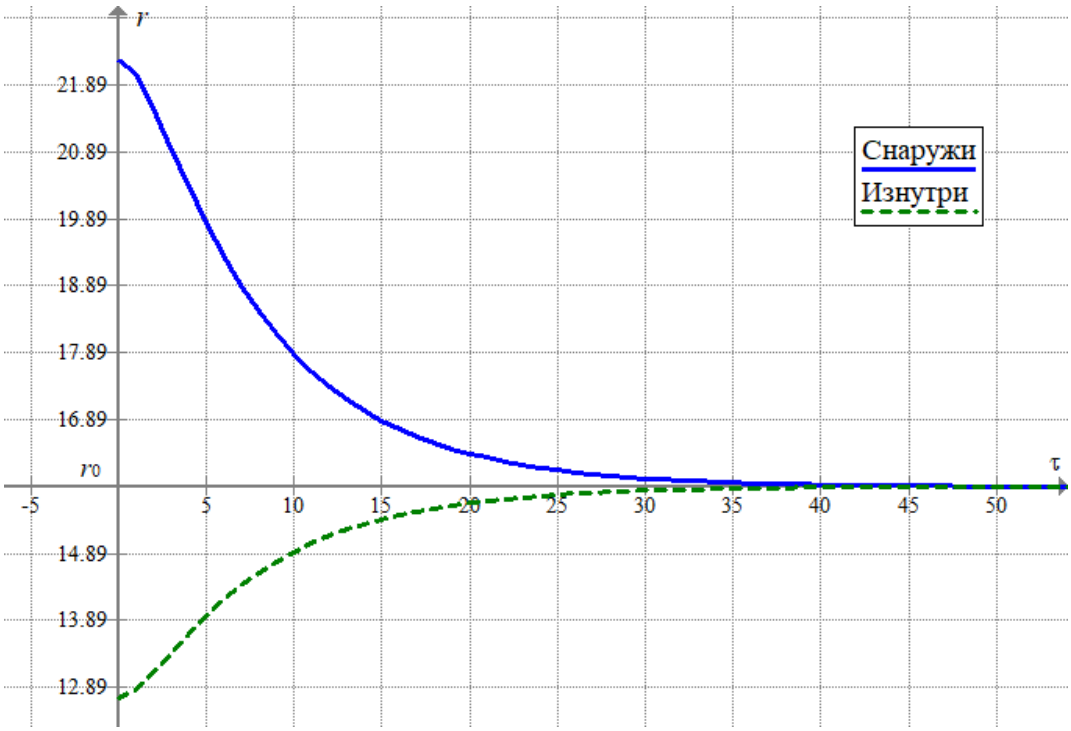

Рис. 3. Переходные процессы радиальной дальности $r(\tau)$

Изменение полярного угла $\zeta(\tau)$, показанное на рисунке **4**, имеет параболический вид на участке непосредственного выведения и уравнение прямой линии при движении по орбите.

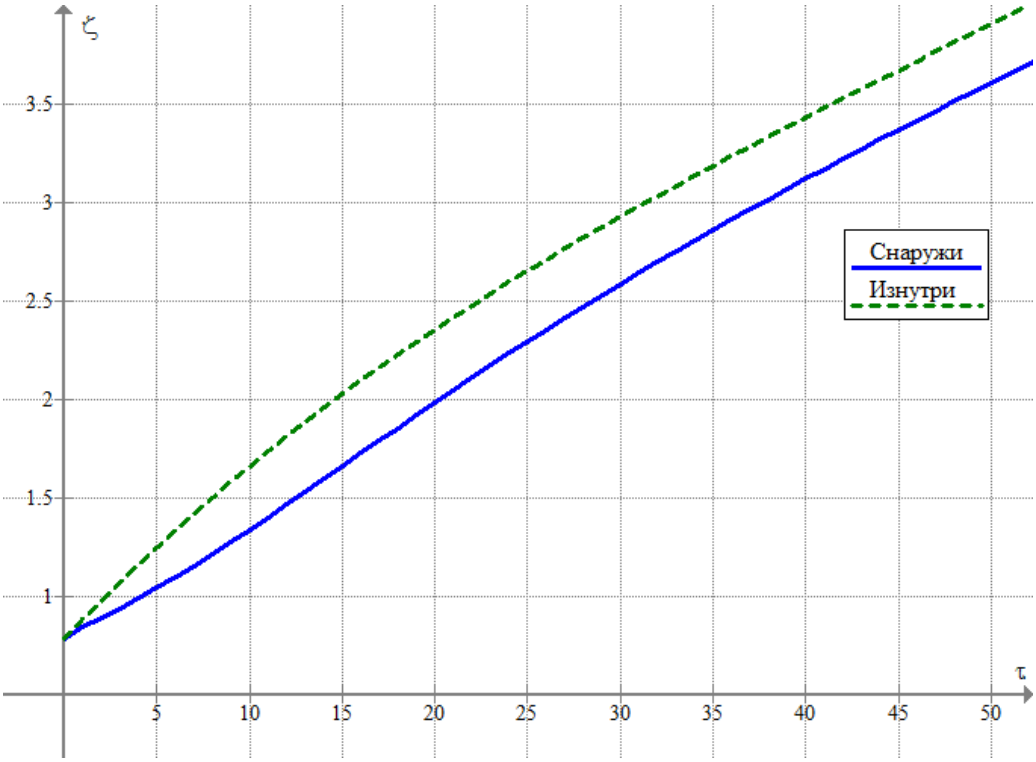

Рис. 4. Переходные процессы полярного угла $\zeta(\tau)$

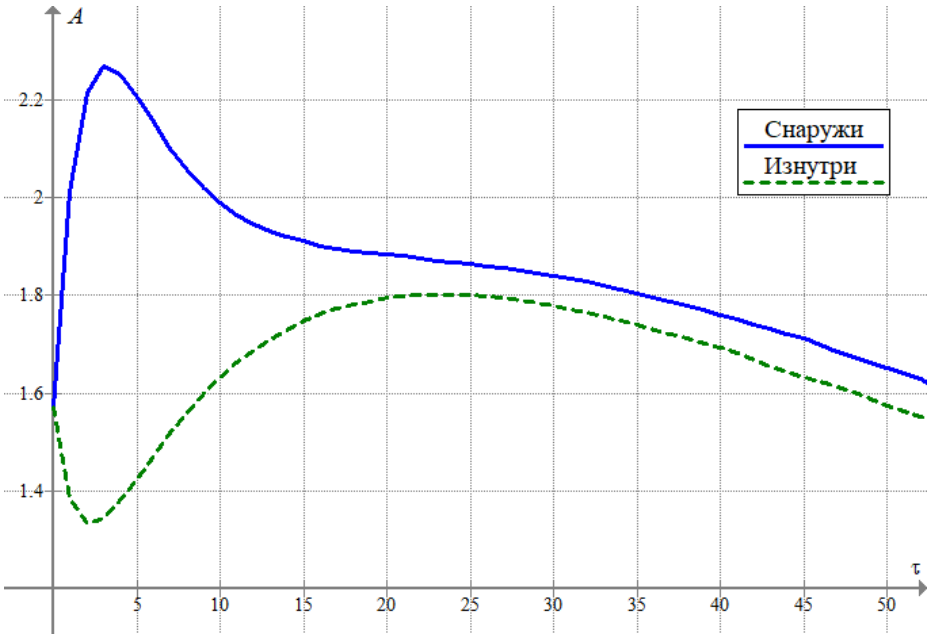

Рис. 5. Переходные процессы относительного курса ЛА $A(\tau)$

На рисунке 6 представлены функции управления $\sigma(\tau)$ в процессе выведения ЛА. Требуемый для движения на целевой орбите угол крена ЛА равен $\gamma' = \mathrm{arctg}\dfrac{V^2}{g\,R_0} = 3{,}60^0 = 0{,}063$. Именно это значение является асимптотой обоих графиков.

Для обеспечения разворота на целевую орбиту снаружи выполняется движение с правым углом креном и небольшим перерегулированием относительно конечного значения. При выведении изнутри на начальном этапе движение выполняется с левым углом крена с последующим вписыванием в требуемое положительное значение угла крена на орбите.

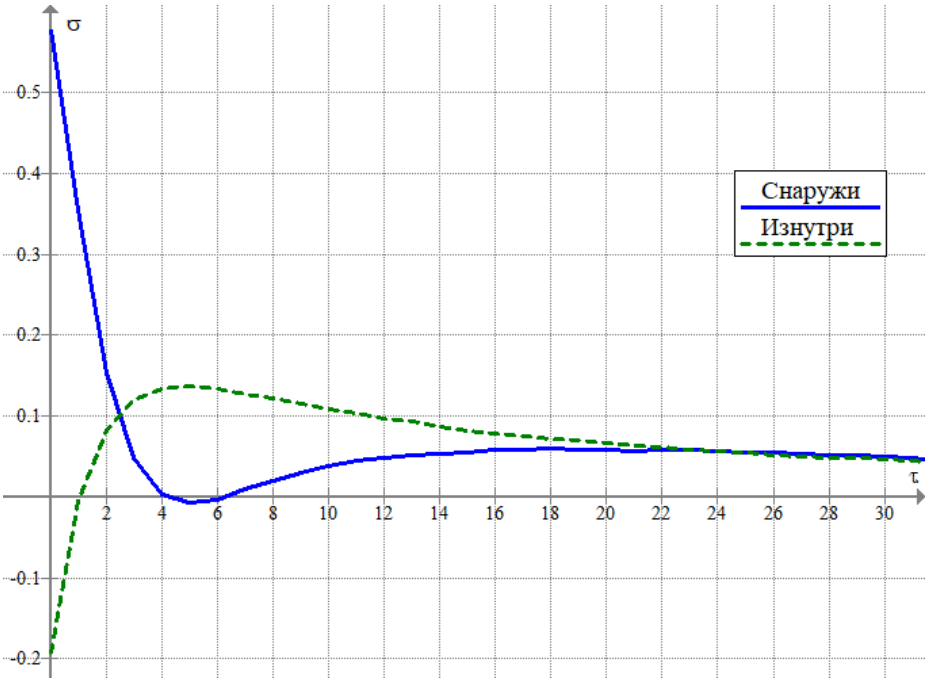

Рис. 6. Изменение функции управления $\sigma(\tau)$

Показанные на рисунке 2 функции изменения полярных координат (r, ζ) пересчитаны в прямоугольные координаты (X, Z) по формулам

$$X = r\frac{V^2}{g}\cos\zeta, \quad Z = r\frac{V^2}{g}\sin\zeta, \tag{27}$$

и результирующие траектории «в плане» представлены на рисунке **7**.

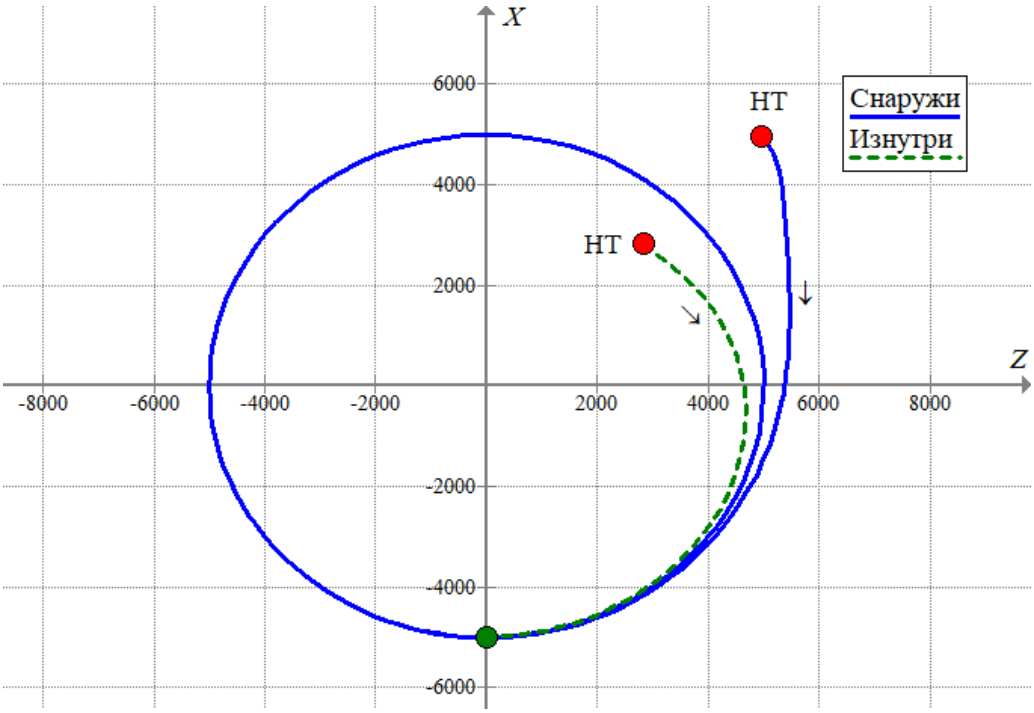

Рис. **7**. Траектория выведения в прямоугольных координатах (Z, X)

Траектории рисунка **7** также могут быть рассчитаны непосредственным интегрированием уравнений движения в прямоугольных координатах [9] с учётом управления, показанного на рисунке **6**.

В общем случае процесс выведения ЛА на круговую орбиту (при значительном отклонении дальности и/или угла курса от требуемых величин) содержит три участка траектории:

1. разворот на угол относительного курса, когда $\sin A \approx 0$;
2. прямолинейное движение способом путевого управления в направлении орбиты;
3. «вписывание» в орбиту при близком расстоянии до неё.

При некоторых начальных условиях, в частности при стабилизации движения на орбите, второй участок (прямолинейного движения) может отсутствовать. По первому и третьему уравнению системы (3) с использованием средних значений скорости разворота и радиального движения может быть получена зависимость критической дальности отсутствия прямолинейного движения для подхода к орбите снаружи (наиболее актуальный случай) в виде

$$r_{\text{кр}} - r_0 \cong \sqrt{\frac{\pi - A}{a_0}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}}. \tag{28}$$

На рисунке 8 в плоскости (r, A) показана граничная линия $r_{кр}(A)$ при диапазоне $A \in (\pi/4, \pi)$, разделяющая область начальных условий на две подобласти: без прямолинейного участка (без путевого управления) и с прямолинейным участком (с путевым управлением).

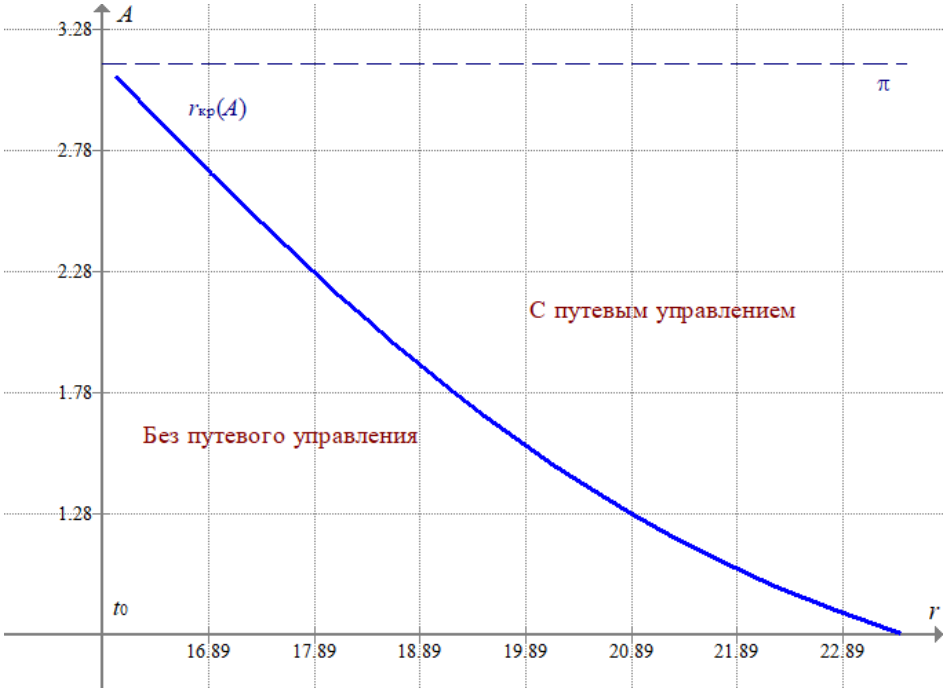

Рис. 8. Подобласти начальных условий учёта путевого управления

Граничная линия $r_{кр}(A)$, показанная на рисунке 8, имеет слабую параболическую зависимость.

Заключение

В работе рассмотрен синтез управления при наведении летательного аппарата на горизонтальную круговую орбиту, основанный на методе обратной задачи динамики в разностной форме второго порядка. Полученные формулы для расчёта управления по крену являются достаточно экономичными с точки зрения требуемых вычислительных ресурсов и содержат входные навигационно-пилотажные характеристики, предоставляемые большинством комплектов бортовой аппаратуры ЛА.

Описание траекторного движения в полярных координатах имеет «естественное» обоснование из-за использования в качестве параметра управления радиальной дальности, а также при применении радионавигационных систем ближней навигации в процессе маневрирования.

Представленная методика имеет перспективы дальнейшего развития, в частности, при включении переменной управления в модель описания объекта, учёте инерционности управления и при использовании обратной связи по управлению [10].

Предложенные алгоритмы практически могут быть применены в составе программно-математического обеспечения бортовых пилотажно-навигационных комплексов ЛА, а также при автоматизации штурманской подготовки полётов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бойчук Л. М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления / Л. М. Бойчук – М.: Энергия, 1971. – 112 с.

2. *Крутько П. Д.* Обратные задачи динамики в теории автоматического управления / П. Д. Крутько – М.: Машиностроение, 2004. – 576 с.
3. *Гурский Н. Н.* Синтез регуляторов для управления движением мехатронных систем / Н. Н. Гурский, Ю. И. Слабко, Р. И. Фурунжиев, А. Л. Хомич // Информатика. – 2008. – № 4. – С. 34-40.
4. *Колесников А. А.* Синергетические методы управления сложными системами: Теория системного синтеза / А. А. Колесников – М.: Едиториал УРСС, 2019. – 240 с.
5. *Павловский В. Е.* Исследование обратной задачи для вычисления управляющих воздействий для квадрокоптера / В. Е. Павловский, А. В. Савицкий – Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. – № 17. – 20 с.
6. *Ким Д. П.* Теория автоматического управления / Д. П. Ким – М.: Юрайт, 2015. – 276 с.
7. *Бесекерский В. А.* Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов – СПб: Профессия, 2007. – 752 с.
8. *Бойко Е. Г.* Высшая геодезия. Часть II. Сфероидическая геодезия / Е. Г. Бойко – М.: Картгеоцентр-Геодезиздат, 2003. – 144 с.
9. *Козарук В. В.* Навигационные эргатические комплексы самолетов / В. В. Козарук, Я. Ю. Ребо – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.
10. *Алесов М. Б.* Синтез управления траекторным движением летательного аппарата методом обратной задачи / М. Б. Алесов, Г. К. Гладков // Аспирант и соискатель. – 2021. – № 2. – С. 68-76.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРЕ

Алесов Михаил Борисович
Ведущий инженер, канд. техн. наук, доцент
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро»
195009, Россия, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21
E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru