



ТРАЕКТОРИИ СМЕНЫ УЧАСТКА МАРШРУТА С УЧЁТОМ ИЗМЕНЕНИЯ ВОЗДУШНОЙ СКОРОСТИ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА

М. Б. Алесов¹, А. П. Ласточкин²

¹Раменское приборостроительное конструкторское бюро

²АО «Кронштадт Технологии – Беспилотные Системы»

Рассмотрена задача бокового маневрирования летательного аппарата (ЛА) для смены линии заданного пути (ЛЗП) на маршруте при условии пролёта активного поворотного пункта маршрута (ППМ) «рядом» (fly-by). Выполнен расчёт бокового упреждения разворота с учётом изменения воздушной скорости ЛА, ограничения угла крена и скорости его изменения. Показано, что управляющая функция угла крена при выполнении манёвра имеет «трапецевидную» или «треугольную» форму. Получены формулы для расчёта моментов времени переключения управления, характерных состояний фазовых переменных модели движения и, в частности, бокового упреждения разворота. Даны формальные описания областей фазовой плоскости, соответствующих двум типам управления. Представлены примеры расчётов параметров управления и моделирования траекторий ЛА при различных вариантах начальных условий подхода к новому участку маршрута.

Ключевые слова: траекторное управление летательным аппаратом, оптимальное программное управление, критерий быстродействия, инерционное управление, боковое упреждение разворота.

Для цитирования:

Алесов, М. Б. Траектории смены участка маршрута с учётом изменения воздушной скорости летательного аппарата / М. Б. Алесов, А. П. Ласточкин // Системный анализ и логистика. – 2025. – № 2(45). – с. 10-28. DOI: 10.31799/2077-5687-2025-2-10-28.

Введение

Одной из важных воздушных операций летательного аппарата (ЛА) на маршруте является переход с текущего активного участка прямолинейного движения на новую линию заданного пути (ЛЗП) при подлёте к очередному поворотному пункту маршрута (ППМ).

Традиционно при условии пролёта ЛА активного ППМ «рядом» («около», «мимо», fly-by) на текущем активном участке маршрута заранее рассчитывается расстояние до ППМ, называемое линейным упреждением разворота (ЛУР), по достижении которого непосредственно выполняется манёвр разворота на новый участок маршрута [1, 2, 3]. Другим подходом к организации смены ЛЗП является использование бокового упреждения разворота (БУР), отмеряемого по нормали от нового участка маршрута. В этом случае движение ЛА осуществляется до момента достижения расчётного значения БУР, после чего выполняется непосредственный манёвр разворота [4].

Использование критерия максимального быстродействия или критерия минимизации «расхода» при синтезе программного управления определяет релейный (кусочно постоянный, ступенчатый) вид функции управления. При этом предполагается, что в начале разворота угол крена ЛА «мгновенно» изменяется до максимального по абсолютной величине значения, а по окончании процесса управления ЛА «мгновенно» восстанавливается до нулевого начального значения. Такой тип управления носит название – безынерционное управление. Однако при управлении аэромеханическими системами как в ручном, так и в автоматическом режиме следует учитывать инерционность управляющего воздействия, вызванную естественными и технологическими причинами. Это осуществляется путём введения в модель системы управления дополнительного ограничения на изменение функции управления (скорость угла крена).

Кроме того, следует также принять во внимание, что при ненулевом угле крена уменьшается вертикальная составляющая подъёмной силы, что вызывает уменьшение высоты полёта ЛА. В качестве одного из способов компенсации такого явления может быть применено



увеличение воздушной скорости ЛА и этот фактор должен быть учтён при выполнении траекторных расчётов.

Современные условия применения пилотажно-навигационных комплексов ЛА предъявляют повышенные требования к точности и надёжности выполнения воздушных операций, поэтому учёт инерционности управления и изменения воздушной скорости при выполнении манёвра разворота вполне обоснован не только логикой развития теории траекторного управления, но и практической значимостью результатов решения такой задачи.

Вопросы синтеза оптимального по критерию максимального быстродействия управления движением ЛА при смене активного участка маршрута и смежные вопросы траекторного управления рассмотрены в работах ряда авторов [5, 6]. Теоретические проблемы синтеза инерционного управления динамическими системами изложены в работах И.М. Черноусько и др. [7], В.М. Александрова [8], Р. Габасова и Ф.М. Кирилловой [9].

Данная статья посвящена синтезу программного управления, обеспечивающего оптимальность режима смены ЛЗП на маршруте при ограничении величины управляющего воздействия (допустимого угла крена ЛА), скорости изменения угла крена и при учёте изменения воздушной скорости в условиях постоянного влияния ветра.

1 Модель движения ЛА и особенности управления

Горизонтальное движение ЛА в боковом направлении относительно новой ЛЗП описывается системой двух дифференциальных уравнений с переменными состояния Z и ψ [5]:

$$\frac{dZ}{dt} = V \sin \psi + U_z, \quad \frac{d\psi}{dt} = \frac{g}{V} v, \quad (1)$$

где Z – боковое отклонение от новой ЛЗП (положительное значение отсчитывается вправо от направления ЛЗП), м; t – время, с; ψ – относительный угол курса (угол текущего курса ЛА относительно направления новой ЛЗП, положительное значение отсчитывается вправо от ЛЗП), рад, допустимые значения курса $-\pi < \psi < \pi$; V – воздушная скорость ЛА, м/с; U_z – поперечная составляющая скорости ветра, м/с; $v = \operatorname{tg} \gamma$ – функция управления; γ – угол крена ЛА, рад.

Будем полагать, что при развороте угол атаки сохраняется неизменным и для сохранения постоянной высоты полёта потребуется, чтобы вертикальная компонента подъёмной силы была уравновешена силой тяжести ЛА. В этом случае требуемое изменение воздушной скорости ЛА описывается формулой [10]

$$V(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\cos \gamma}}, \quad (2)$$

где V_0 – воздушная скорость при горизонтальном прямолинейном полёте на текущей активной ЛЗП.

Выразим функцию скорости в зависимости от тангенса угла крена

$$V(t) = V_0 \sqrt[4]{1 + v^2}. \quad (3)$$

Заменой переменных

$$\tau = t \frac{g}{V_0}, \quad z = Z \frac{g}{V_0^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V_0} \quad (4)$$



модель движения (1) сводится к системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \sqrt[4]{1+v^2} \sin \psi + u_z, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+v^2}} v, \quad (5)$$

где τ – нормированное время; (z, ψ) – переменные состояния (нормированное боковое отклонение и относительный угол курса ЛА); u_z – параметр бокового ветра.

В дальнейшем все позиционные и кинематические параметры ЛА рассматриваются в горизонтальной прямоугольной системе координат (Z, X) , или в системе нормированных координат (z, x) , относительно новой ЛЗП с началом в точке ППМ, где X и x – координата, отсчитываемая вдоль направления новой ЛЗП.

Задача управления боковым движением ЛА при условии пролёта ППМ «рядом» (fly-by) формулируется следующим образом. При заданном начальном значении бокового отклонения и угла курса на активной (текущей) ЛЗП

$$z(\tau_1) = z_1, \quad \psi(\tau_1) = \psi_1 \quad (6)$$

следует перевести ЛА на новую (следующую) ЛЗП, при этом конечное состояние:

$$z(\tau_k) = 0, \quad \psi(\tau_k) = \delta, \quad (7)$$

где ψ_1 – известный относительный курс при подходе к ППМ (требуемый курс текущего участка ЛЗП с учётом ветра); z_1 – боковое отклонение в начале выполнения разворота, или нормированное боковое упреждение разворота (БУР); τ_1, τ_k – моменты начала и окончания непосредственного разворота; δ – обратный угол сноса на новой ЛЗП, равный $\delta = -\arcsin \frac{U_z}{V} = -\arcsin u_z$, рад.

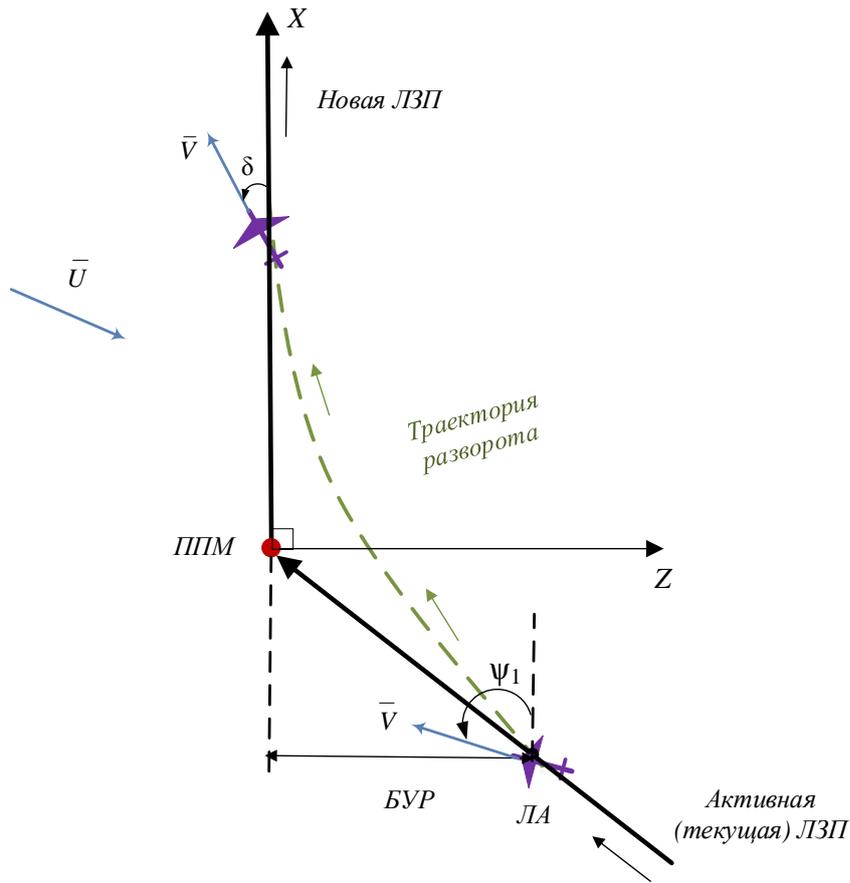


Рис. 1. Схема перехода ЛА на новую ЛЗП

Моменты времени начала и окончания разворота, а также величина БУР не заданы и подлежат расчёту в процессе синтеза управления.

В качестве функции управления (управляющего воздействия) используется тангенс угла крена $v(\tau)$, на который накладываются ограничения по величине и по скорости изменения

$$|v(\tau)| \leq v_0 = \operatorname{tg} \gamma_0, \quad (8)$$

$$\left| \frac{dv}{d\tau} \right| = |\omega(\tau)| \leq \omega_0, \quad (9)$$

где γ_0 – заданное максимальное значение угла крена, $\gamma_0 > 0$; ω_0 – максимально допустимая нормированная скорость изменения тангенса угла крена, $\omega_0 > 0$.

Такой вид управления, при котором изменение угла крена происходит не мгновенно, а с некоторой ограниченной скоростью, носит название инерционного управления.

Для выполнения синтеза управления переменная v включается в состав фазовых координат и описание объекта управления (5) дополняется уравнением

$$\frac{dv}{d\tau} = \omega(\tau), \quad (10)$$

при этом движение системы рассматривается под действием новой функции управления $\omega(\tau)$ при ограничениях на новую фазовую координату вида



$$v(\tau) + v_0 \geq 0, \quad v_0 - v(\tau) \geq 0. \quad (11)$$

Дополнительно к краевым условиям (6), (7) учитываются условия на функцию $v(\tau)$

$$v(\tau_1) = 0, \quad v(\tau_k) = 0. \quad (12)$$

Оптимальное управление выбирается исходя из требования быстродействия, при этом функционал качества управления формально имеет вид

$$J(\omega) = \int_{\tau_1}^{\tau_k} 1 dt \rightarrow \min. \quad (13)$$

Функция Понтрягина сформулированной задачи оптимального управления записывается как

$$H(z, \psi, v; \lambda_i, \mu_i; \omega) = \lambda_1 \sqrt[4]{1+v^2} \sin \psi + \lambda_1 u_z + \lambda_2 \frac{v}{\sqrt[4]{1+v^2}} + \lambda_3 \omega - 1 + \mu_1 (v + v_0) + \mu_2 (v_0 - v), \quad (14)$$

где μ_1, μ_2 – множители Лагранжа, соответствующие ограничениям новых фазовых координат (11); $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – сопряжённые функции, являющиеся решениями сопряжённой системы (уравнения Эйлера-Лагранжа)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\lambda_1}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \\ \frac{d\lambda_2}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\lambda_1 \sqrt[4]{1+v^2} \cos \psi, \\ \frac{d\lambda_3}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_1 \frac{v}{2(1+v^2)^{3/4}} \sin \psi - \lambda_2 \frac{2+v^2}{2(1+v^2)^{5/4}} - \mu_1 + \mu_2. \end{array} \right. \quad (15)$$

Дополнительно принимаются во внимание условия дополняющей нежесткости и неотрицательности множителей Лагранжа:

$$\begin{aligned} \mu_1(\tau)[v(\tau) + v_0] &= 0, \quad \mu_2(\tau)[v_0 - v(\tau)] = 0, \\ \mu_1(\tau) &\geq 0, \quad \mu_2(\tau) \geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Применение принципа Понтрягина Л.С. позволяет установить вид функции управления $\omega(\tau)$. Из условия максимума гамильтониана следует, что функция скорости оптимального управления $\omega(\tau)$ должна иметь кусочно-постоянный вид:

$$\omega(\tau) = \omega_0 \begin{cases} 0, & \text{если } \lambda_3(\tau) = 0, \\ \text{sign}[\lambda_3(\tau)], & \text{если } \lambda_3(\tau) \neq 0. \end{cases} \quad (17)$$

На основании анализа решения сопряжённой системы (15) можно сделать следующие выводы.

- 1) Постоянное нулевое значение скорости изменения угла крена – переменной ω возможно только на участке, где достигаются граничные значения угла крена, т.е.



- $v(\tau) = \pm v_0$, при этом выполняются условия нежесткости (16) и хотя бы один множитель Лагранжа ненулевой. Внутри указанных границ переменной v скорость изменения $\omega(\tau)$ имеет кусочно-постоянный вид и принимает значения $\omega(\tau) = \pm \omega_0$.
- 2) За счёт монотонности сопряжённой функции λ_3 при нулевых множителях Лагранжа функция скорости $\omega(\tau)$ может переключаться чередованием значений: $\{+\omega_0, -\omega_0\}$ или $\{-\omega_0, +\omega_0\}$.
 - 3) Возможный вид последовательности дискретных значений функции управления: $\{+\omega_0, -\omega_0\}$, $\{+\omega_0, 0, -\omega_0\}$, $\{-\omega_0, +\omega_0\}$, $\{-\omega_0, 0, +\omega_0\}$, т.е. функция угла крена $v(\tau)$ содержит положительную или отрицательную ступень «трапецевидной» или «треугольной» формы, как показано на рисунке 2.

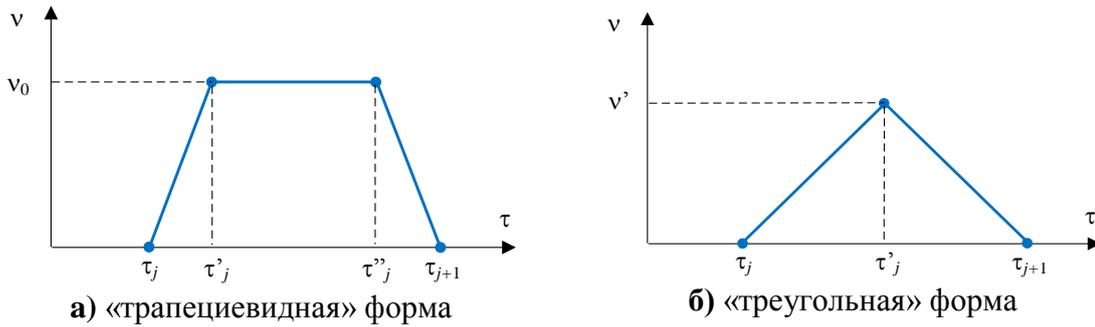


Рис. 2. Возможные формы функции управления $v(\tau)$

После определения структуры управления в дальнейшем, для простоты изложения, будем полагать, что функцией управления по-прежнему является функция тангенса угла крена $v(\tau)$ и различать тип управления по виду этой функции, называя «трапецевидное» управление и «треугольное» управление в соответствии с рисунком 2. Таким образом, выведение ЛА на новую ЛЗП выполняется с помощью одноступенчатого управления $v(\tau)$ указанного вида. На рисунке 2 показана положительная ступень функции угла крена, когда $v(\tau) \geq 0$.

Выражение функции угла крена $v(\tau)$ для положительной (отрицательной) ступени, начинающейся в момент времени τ_1 и заканчивающейся в момент τ_k , можно записать в общем случае как

$$v(\tau) = \pm \omega_0 (\tau - \tau_1) \text{Неv}(\tau - \tau_1) \mp \omega_0 (\tau - \tau'_1) \text{Неv}(\tau - \tau'_1) \mp \omega_0 (\tau - \tau''_1) \text{Неv}(\tau - \tau''_1) \pm \omega_0 (\tau - \tau_k) \text{Неv}(\tau - \tau_k), \quad (18)$$

где $\text{Неv}(\tau)$ – функция Хэвисайда

$$\text{Неv}(\tau) = \begin{cases} 1, & \text{если } \tau \geq 0, \\ 0, & \text{если } \tau < 0. \end{cases}$$

Промежуточные точки τ'_1 , τ''_1 рассчитываются по формулам:

$$\tau'_1 = \frac{\tau_1 + \tau_k}{2} - \left(\frac{\tau_k - \tau_1}{2} - \frac{v_0}{\omega_0} \right) \text{Неv} \left(\frac{\tau_k - \tau_1}{2} - \frac{v_0}{\omega_0} \right), \quad (19)$$



$$\tau_1'' = \frac{\tau_1 + \tau_k}{2} + \left(\frac{\tau_k - \tau_1}{2} - \frac{v_0}{\omega_0} \right) \operatorname{Hev} \left(\frac{\tau_k - \tau_1}{2} - \frac{v_0}{\omega_0} \right).$$

В частных случаях выражения для промежуточных точек (19) запишутся:

- «трапецевидная» форма функции крена $\left(\frac{\tau_k - \tau_1}{2} > \frac{v_0}{\omega_0} \right)$

$$\tau_1' = \tau_1 + \frac{v_0}{\omega_0}, \quad \tau_1'' = \tau_k - \frac{v_0}{\omega_0}; \quad (20)$$

- «треугольная» форма функции крена $\left(\frac{\tau_k - \tau_1}{2} \leq \frac{v_0}{\omega_0} \right)$

$$\tau_1' = \tau_1'' = \frac{\tau_1 + \tau_k}{2}. \quad (21)$$

Таким образом, этап непосредственного разворота в общем случае можно представить как последовательность следующих участков: начальный участок разгона с нарастанием угла крена (по абсолютной величине), участок движения с постоянным максимальным углом крена и финальный участок торможения – угол крена плавно восстанавливается до нулевого значения.

2 Синтез управления при развороте ЛА на новую ЛЗП

При условии пролёта ППМ «рядом» (fly-by) реализуется одноступенчатое управление (по углу крена) выхода ЛА на новую ЛЗП. Рассмотрим этап непосредственного разворота (без предварительного этапа подхода к ЛЗП) при отсчёте времени от момента начала разворота. Таким образом, параметр времени принадлежит интервалу $\tau \in [0, \tau_p]$, где τ_p – длительность разворота.

Отдельно выполним синтез траектории для каждого типа управления. При «трапецевидном» управлении временная зависимость угла курса получается интегрированием уравнения движения (5) при соответствующей функции внешнего воздействия (18), (20) и имеет следующий вид:

- для участка $0 \leq \tau \leq \tau_1'$

$$\psi(\tau) = \psi_1 \pm a [(1 + (\omega_0 \tau)^2)^{3/4} - 1]; \quad (22)$$

- для участка $\tau_1' \leq \tau \leq \tau_1''$

$$\psi(\tau) = \psi_1' \pm b (\tau - \tau_1'); \quad (23)$$

- для участка $\tau_1'' \leq \tau \leq \tau_p$

$$\psi(\tau) = \psi_1'' \mp a [1 + (v_0 - \omega_0 (\tau - \tau_1''))^2]^{3/4} \pm a (1 + v_0^2)^{3/4}, \quad (24)$$

где ψ_1 – начальное значение угла курса на текущей (активной) ЛЗП, рад; знаки « \pm » соответствуют положительной или отрицательной ступени управления соответственно;

$a = \frac{2}{3\omega_0}$, $b = \frac{v_0}{4\sqrt{1+v_0^2}}$ – константы; $\tau_1' = \frac{v_0}{\omega_0}$ – момент времени переключения управления в

конце первого участка (разгона); $\psi_1' = \psi_1 \pm a [(1 + v_0^2)^{3/4} - 1]$ – угол курса в момент



переключения управления в конце первого участка; $\tau_1'' = \tau_p - \frac{v_0}{\omega_0}$ – момент времени

переключения управления в конце второго участка; $\psi_1'' = \psi_1' \pm b \left(\tau_p - 2 \frac{v_0}{\omega_0} \right)$ – угол курса в

момент переключения управления в конце второго участка.

Значение угла курса в момент завершения манёвра должно соответствовать крайним условиям (6), (7). В результате получаем выражение курса в конце разворота

$$\psi(\tau_p) = \psi_1 \pm a [(1 + v_0^2)^{3/4} - 1] \pm b \left(\tau_p - 2 \frac{v_0}{\omega_0} \right) = \delta. \quad (25)$$

Изменение бокового отклонения определяется интегрированием первого уравнения формулы (5):

– для участка $0 \leq \tau \leq \tau_1'$

$$z(\tau) = z_1 + \frac{1}{\omega_0} \sin(\psi_1 \mp a) \text{Ce}(\omega_0 \tau; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos(\psi_1 \mp a) \text{Se}(\omega_0 \tau; a) + u_z \tau; \quad (26)$$

– для участка $\tau_1' \leq \tau \leq \tau''$

$$z(\tau) = z_1' + c \sin(\psi_1') \sin(b(\tau - \tau_1')) \mp c \cos(\psi_1') [\cos(b(\tau - \tau_1')) - 1] + u_z \tau; \quad (27)$$

– для участка $\tau_1'' \leq \tau \leq \tau_p$

$$z(\tau) = z_1'' - \frac{1}{\omega_0} \sin[\psi_1'' \pm a (1 + v_0^2)^{3/4}] \text{Ce}'(v_0 - \omega_0 (\tau - \tau''), v_0; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos[\psi_1'' \pm a (1 + v_0^2)^{3/4}] \text{Se}'(v_0 - \omega_0 (\tau - \tau''), v_0; a) + u_z \tau, \quad (28)$$

где $z_1' = z_1 + \frac{1}{\omega_0} \sin(\psi_1 \mp a) \text{Ce}(v_0; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos(\psi_1 \mp a) \text{Se}(v_0; a)$ – боковое отклонение в момент переключения управления в конце первого участка (разгона);

$z_1'' = z_1' + c \sin(\psi_1') \sin[b(\tau_p - 2 \frac{v_0}{\omega_0})] \mp c \cos(\psi_1') [\cos(b(\tau_p - 2 \frac{v_0}{\omega_0})) - 1]$ – боковое отклонение в

момент переключения управления в начале участка торможения; $c = \frac{\sqrt[2]{1 + v_0^2}}{v_0}$ – константа;

интегралы тригонометрических функций с пределами интегрирования записаны как

$$\text{Ce}'(\tau'', \tau'; a) = \text{Ce}(\tau''; a) - \text{Ce}(\tau'; a), \quad \text{Se}'(\tau'', \tau'; a) = \text{Se}(\tau''; a) - \text{Se}(\tau'; a);$$

Интегралы

$$\text{Se}(\tau'; a) = \int_0^{\tau'} \sqrt[4]{1 + \tau^2} \sin(a(1 + \tau^2)^{3/4}) d\tau, \quad \text{Ce}(\tau'; a) = \int_0^{\tau'} \sqrt[4]{1 + \tau^2} \cos(a(1 + \tau^2)^{3/4}) d\tau \quad (29)$$

Интегралы $\text{Se}(\tau'; a)$, $\text{Ce}(\tau; a)$ не выражаются в элементарных и специальными функциях и могут быть вычислены с помощью степенных разложений в окрестности $\tau = 0$ вида



$$\begin{aligned}
 \text{Se}(\tau; a) &= \tau \sin a + \frac{1}{12} \tau^3 (\sin a + 3a \cos a) - \frac{3}{160} \tau^5 (3a^2 \sin a + \sin a - a \cos a) + \\
 &+ \frac{1}{896} \tau^7 (7 \sin a - a (9a^2 + 7) \cos a) + O(\tau^9), \\
 \text{Ce}(\tau; a) &= \tau \cos a + \frac{1}{12} \tau^3 (\cos a - 3a \sin a) - \frac{3}{160} \tau^5 (3a^2 \cos a + \cos a + a \sin a) + \\
 &+ \frac{1}{896} \tau^7 (7 \cos a + a (9a^2 + 7) \sin a) + O(\tau^9).
 \end{aligned} \tag{30}$$

Следует отметить, что влияние ветра на линейное боковое перемещение может быть учтено аддитивно, после определения длительности разворота τ_p по результатам углового движения (25).

Изменение бокового отклонения от начального значения $z_{1\pm}$ до нуля, соответствующее граничным условиям (6), (7), позволяет получить выражение для расчёта БУР

$$\begin{aligned}
 z(\tau_p) &= z_{1\pm} + \frac{1}{\omega_0} \sin(\psi_1 \mp a) \text{Ce}(v_0; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos(\psi_1 \mp a) \text{Se}(v_0; a) + \\
 &+ c \sin(\psi'_1) \sin(b(\tau_p - 2\frac{v_0}{\omega_0})) \mp c \cos(\psi'_1) [\cos(b(\tau_p - 2\frac{v_0}{\omega_0})) - 1] + \\
 &+ \frac{1}{\omega_0} \sin[\psi''_1 \pm a(1 + v_0^2)^{3/4}] \text{Ce}(v_0; a) \mp \\
 &\mp \frac{1}{\omega_0} \cos[\psi''_1 \pm a(1 + v_0^2)^{3/4}] \text{Se}(v_0; a) + u_z \tau_p = 0.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Неизвестными являются: длительность разворота τ_p и боковое упреждение разворота $z_{1\pm}$, для расчёта которых имеются два уравнения – формулы (25) и (31).

Из уравнения (25) явно может быть получено выражение для расчёта длительности разворота

$$\tau_p = \pm \frac{(\delta - \psi_1)}{b} - 2 \frac{a}{b} [(1 + v_0^2)^{3/4} - 1] + 2 \frac{v_0}{\omega_0}. \tag{32}$$

С учётом известной длительности управления τ_p и подстановки её значения в формулу бокового отклонения (31) получим зависимость БУР $z_{1\pm}(\psi_1) = z_{1\pm}$ от угла курса ψ_1 на текущей ЛЗП (относительного курса подхода), которая представляет собой фазовую линию начальных условий одноступенчатого «трапецевидного» управления $\Pi_{1\pm} = \{(z_1, \psi_1) | z_{1\pm}(\psi_1)\}$, как показано на рисунке 3. Линия имеет две «ветви» – для положительной Π_{1+} и отрицательной Π_{1-} ступеней управления соответственно.

При «треугольной» функции управления функция угла курса имеет два участка: разгона и торможения. Изменение угла курса получается интегрированием уравнения движения (5) при соответствующей функции внешнего воздействия (18), (21) и имеет вид

– для участка $0 \leq \tau \leq \tau'_1$

$$\psi(\tau) = \psi_1 \pm a [(1 + (\omega_0 \tau)^2)^{3/4} - 1]; \tag{33}$$

– для участка $\tau'_1 \leq \tau \leq \tau_p$

$$\psi(\tau) = \psi'_1 \mp a (1 + (v' - \omega_0(\tau - \tau'))^2)^{3/4} \pm a (1 + v'^2)^{3/4}, \tag{34}$$



где v' – максимальное значение тангенса угла крена, равное $v' = \omega_0 \tau'_1 < v_0$; $\tau'_1 = \frac{\tau_k}{2}$ – момент времени при переключении управления; $\psi'_1 = \psi_1 \pm a [(1 + v'^2)^{3/4} - 1]$ – угол курса в момент переключения управления.

Значение угла курса в момент завершения манёвра должно соответствовать крайним условиям (6), (7). В результате получаем выражение курса в конце разворота

$$\psi(\tau_p) = \psi_1 \pm \frac{4}{3\omega_0} [(1 + v'^2)^{3/4} - 1] = \delta. \quad (35)$$

Изменение бокового отклонения определяется интегрированием первого уравнения (5)

– для участка $0 \leq \tau \leq \tau'_1$

$$z(\tau) = z_1 + \frac{1}{\omega_0} \sin(\psi_1 \mp a) \text{Ce}(\omega_0 \tau; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos(\psi_1 \mp a) \text{Se}(\omega_0 \tau; a) + u_z \tau, \quad (36)$$

– для участка $\tau'_1 \leq \tau \leq \tau_p$

$$z(\tau) = z'_1 - \frac{1}{\omega_0} \sin[\psi'_1 \pm a (1 + v'^2)^{3/4}] \text{Ce}'(v' - \omega_0 (\tau - \tau''), v'; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos[\psi'_1 \pm a (1 + v'^2)^{3/4}] \text{Se}'(v' - \omega_0 (\tau - \tau''), v'; a) + u_z \tau, \quad (37)$$

где $z'_1 = z_1 + \frac{1}{\omega_0} \sin(\psi_1 \mp a) \text{Ce}(v'; a) \pm \frac{1}{v_0} \cos(\psi_1 \mp a) \text{Se}(v'; a)$ – боковое отклонение в момент переключения управления.

Изменение бокового отклонения от начального значения $z_{1\pm}$ до нуля, что соответствует граничным значениям (6), (7), позволяет получить выражение для расчёта БУР

$$z(\tau_p) = z_{1\pm} + \frac{1}{\omega_0} \sin(\psi_1 \mp a) \text{Ce}(v'; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos(\psi_1 \mp a) \text{Se}(v'; a) + \frac{1}{\omega_0} \sin[\psi'_1 \pm a (1 + v'^2)^{3/4}] \text{Ce}'(v'; a) \mp \frac{1}{\omega_0} \cos[\psi'_1 \pm a (1 + v'^2)^{3/4}] \text{Se}'(v'; a) + u_z \tau_p = 0. \quad (38)$$

Неизвестными являются: длительность разворота τ_p и боковое упреждение разворота $z_{1\pm}$, для расчёта которых имеются два уравнения – формулы (35) и (38). Из уравнения (35) явно может быть получено выражение для расчёта длительности разворота

$$\tau_p^2 = \frac{4}{\omega_0^2} \left[\pm \frac{3\omega_0}{4} (\delta - \psi_1) + \frac{3\omega_0}{4} \right]^{4/3} - \frac{4}{\omega_0^2}. \quad (39)$$

Подстановка выражения длительности управления τ_p (39) и выражения $v' = \omega_0 \frac{\tau_p}{2}$ в формулу бокового отклонения (38) позволяет получить зависимость БУР $z_{1\pm}(\psi_1) = z_{1\pm}$ от угла курса ψ_1 на текущей ЛЗП, которая представляет собой фазовую линию начальных условий одноступенчатого «треугольного» управления $\Lambda_{1\pm} = \{(z, \psi) | z_{1\pm}(\psi)\}$, как показано на рисунке 3.



3 Типы управления и области начальных условий

На фазовой плоскости (z, ψ) выделяются 4 области подхода к новой ЛЗП Ω_{0+} , Δ_{0+} , Ω_{0-} , Δ_{0-} определяющих тип управления $\{0, +1\}$, $\{0, -1\}$ соответственно и ограниченных линиями включения управления соответствующего знака $\{\Pi_{1+}, \Lambda_{1+}\}$, $\{\Pi_{1-}, \Lambda_{1-}\}$ формул (31), (38). Данные области начальных условий показаны на рисунке 3. Кроме того, имеются области фазовой плоскости, из которых новая ЛЗП недостижима при начальном прямолинейном движении, они обозначены как $\Omega_{нд}$. Эти области соответствуют значительным позиционным ошибкам при движении по предыдущей ЛЗП и вывод ЛА на новую ЛЗП в этом случае может быть выполнен только с помощью двухступенчатого управления.

Точки, разделяющие линии включения «трапецевидного» и «треугольного» управления на фазовой плоскости, обозначены как $\bar{g}_{1\pm}(\bar{z}_{1\pm}, \bar{\psi}_{1\pm})$, их компоненты определяются формулами (35), (38) при подстановке максимального значения $v' = v_0$ и имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{1\pm} &= \delta \mp 2a[(1+v_0^2)^{3/4} - 1], \\ \bar{z}_{1\pm} &= -\frac{1}{\omega_0} \sin(\bar{\psi}_{1\pm} \mp a) \text{Ce}(v_0; a) \mp \frac{1}{\omega_0} \cos(\bar{\psi}_{1\pm} \mp a) \text{Se}(v_0; a) - \\ & - \frac{1}{\omega_0} \sin[\bar{\psi}'_{1\mp} \pm a(1+v_0^2)^{3/4}] \text{Ce}(v_0; a) \pm \frac{1}{\omega_0} \cos[\bar{\psi}'_{1\mp} \pm a(1+v_0^2)^{3/4}] \text{Se}(v_0; a) - u_z \frac{2v_0}{\omega_0}. \end{aligned} \quad (40)$$

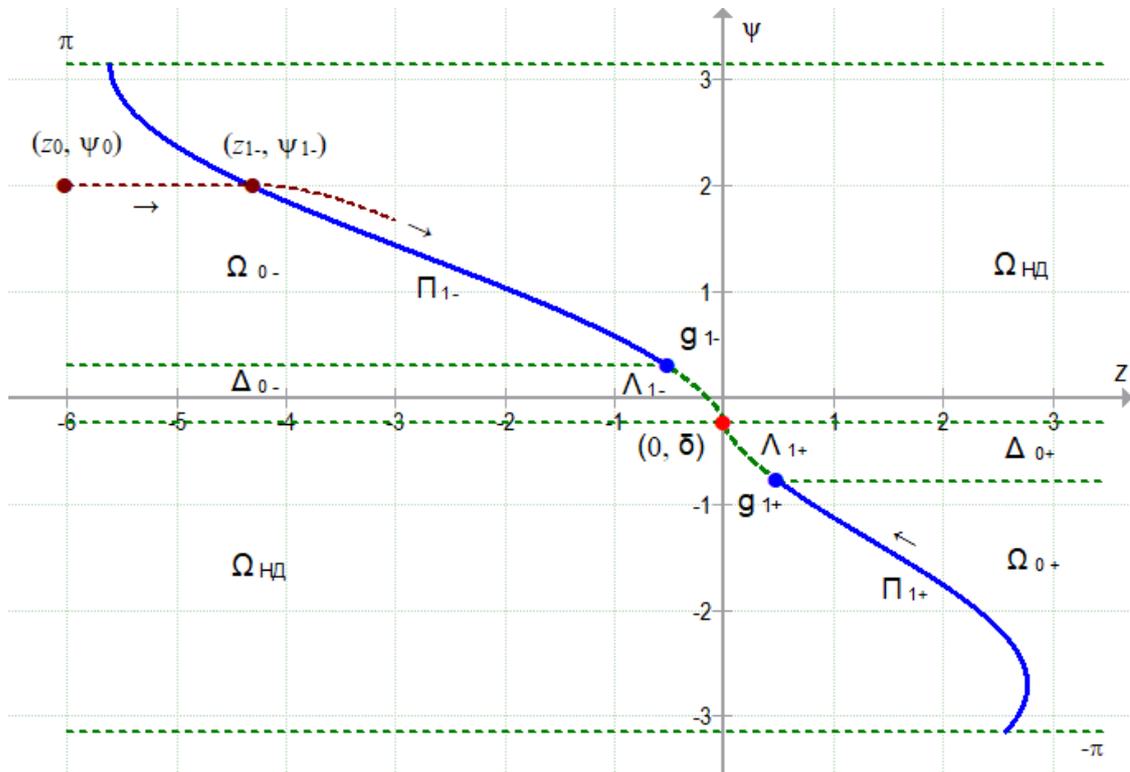


Рис. 3. Области начальных условий и линии включения управления

В таблице 1 дано формальное определение областей начальных состояний для новой ЛЗП и указаны условия включения/выключения управления. При логической записи областей используются следующие определения надграфика (эпиграфа) и подграфика (гипографа):



$$\begin{aligned} \text{ери } z_1 &\equiv \{(\psi_0, z_0) \in \Omega_\psi \times (-\infty, +\infty) \mid z_0 > z_1(\psi_0)\}, \\ \overline{\text{ери}} z_1 &\equiv \{(\psi_0, z_0) \in \Omega_\psi \times (-\infty, +\infty) \mid z_0 \geq z_1(\psi_0)\}, \\ \text{хур } z_1 &\equiv \{(\psi_0, z_0) \in \Omega_\psi \times (-\infty, +\infty) \mid z_0 < z_1(\psi_0)\}, \\ \overline{\text{хур}} z_1 &\equiv \{(\psi_0, z_0) \in \Omega_\psi \times (-\infty, +\infty) \mid z_0 \leq z_1(\psi_0)\}, \end{aligned}$$

где (ψ_0, z_0) – точки фазовой плоскости, соответствующие движению на начальной активной ЛЗП; $z_1(\psi_0)$ – функциональная зависимость фазовых переменных, формулы (31), (38); Ω_ψ – заданная область определения переменной ψ_0 в функциональной зависимости $z_1(\psi_0)$.

Таблица 1 – Области управления для новой ЛЗП и условия включения управления

Область	Тип управления	Определение области $\{(z_0, \psi_0)\}$	Условия начала разворота
Δ_{0+}	Одна положительная ступень $\{0, +1\}$ с «треугольной» функцией угла крена	При $\Omega_\psi = [\overline{\psi}_{1+}, \delta)$ область $(\psi_0, z_0) \in \overline{\text{ери}} z_{1+}$	Включение при $z = z_{1+}(\psi_0)$, формула (38)
Ω_{0+}	Одна положительная ступень $\{0, +1\}$ с «трапециевидной» функцией угла крена	При $\Omega_\psi = (-\pi, \overline{\psi}_{1+})$ область $(\psi_0, z_0) \in \overline{\text{ери}} z_{1+}$	Включение при $z = z_{1+}(\psi_0)$, формула (31)
Δ_{0-}	Одна отрицательная ступень $\{0, -1\}$ с «треугольной» функцией угла крена	При $\Omega_\psi = (\delta, \overline{\psi}_{1-}]$ область $(\psi_0, z_0) \in \overline{\text{хур}} z_{1-}$	Включение при $z = z_{1-}(\psi_0)$, формула (38)
Ω_{0-+}	Одна отрицательная ступень $\{0, -1\}$ с «трапециевидной» функцией угла крена	При $\Omega_\psi = (\overline{\psi}_{1-}, \pi)$ область $(\psi_0, z_0) \in \overline{\text{хур}} z_{1-}$	Включение при $z = z_{1-}(\psi_0)$, формула (31).
$\Omega_{\text{нд}}$	Конечное состояние не может быть достигнуто с помощью одноступенчатого управления	При $\Omega_\psi = (-\pi, \overline{\psi}_{1+}) \cup [\overline{\psi}_{1+}, \delta)$ область $(\psi_0, z_0) \in \overline{\text{хур}} z_{1+}$. При $\Omega_\psi = (\delta, \overline{\psi}_{1-}] \cup (\overline{\psi}_{1-}, \pi)$ область $(\psi_0, z_0) \in \overline{\text{ери}} z_{1-}$.	Расчёт $z_{1\pm}(\psi)$ по формулам (31), (38)

На рисунке 3 показана схема движения по фазовой плоскости при начальных условиях из (z_0, ψ_0) области Ω_{0-} . Вначале, на этапе подхода, выполняется прямолинейное движение с заданным углом курса ψ_0 до пересечения с фазовой линией включения разворота в точке с координатами (z_{1-}, ψ_0) . Далее осуществляется непосредственно разворот с левым углом крена



на новую ЛЗП с описанием траектории и расчётом характерных точек переключения управления по формулам (22)...(28).

4 Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры расчёта характеристик управления и построения траекторий разворота при следующих параметрах модели: воздушная скорость ЛА при прямолинейном полёте равна $V_0 = 300$ км/час; относительно новой ЛЗП ветер имеет только поперечную составляющую скорости $U_z = 20$ м/с; обратный угол сноса на новой ЛЗП равен $\delta = -13,89^\circ = -0,2424$.

Параметры управления: максимальное значение угла крена γ_0 принято равным 30° ; максимальное значение тангенса угла крена v_0 равно $0,577$; максимальная скорость изменения тангенса угла крена $\left(\frac{dv}{dt}\right)_{\max} = \frac{1}{\cos^2 \gamma_0} \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\max}$ равна $0,0698 \text{ с}^{-1}$ (соответствует изменению угла крена $3^\circ/\text{с}$); максимальная нормированная скорость изменения тангенса угла крена $\left(\frac{dv}{d\tau}\right)_{\max} = \omega_0$ равна $0,5930$.

Нормированные безразмерные значения переменных выражаются по формулам (4) как

$$\tau = 0,1177t, \quad z = 1,412Z, \quad u_z = 0,2400,$$

где переменная Z измеряется в километрах, а время t – в секундах.

Показанные на фазовой плоскости (z, ψ) рисунка 3 зависимости БУР $z_{1\pm}(\psi_1)$ соответствуют указанным числовым параметрам задачи. Точки, отделяющие управление «трапецевидного» и «треугольного» вида, $\bar{g}_{1\pm}(\bar{z}_{1\pm}, \bar{\psi}_{1\pm})$ имеют следующие числовые значения фазовых координат, рассчитанные по формулам (40):

$$\bar{z}_{1+} = 0,4946; \quad \bar{\psi}_{1+} = -0,7838; \quad \bar{z}_{1-} = -0,5228; \quad \bar{\psi}_{1-} = 0,2990.$$

Рассмотрим численные примеры моделирования движения ЛА из различных областей начальных условий фазовой плоскости, соответствующих определённым типам управления. Числовые значения начальных условий при различных типах управления разворотом даны в таблице 2.

Предполагается, что отсчёт времени начинается в момент фиксации начальных условий (z_0, ψ_0) на активной ЛЗП $\tau_0 = 0$. Движение ЛА на этапе подхода выполняется с постоянным курсом $\psi_0 = \psi_1$ до достижения величины БУР. Длительность движения на предварительном этапе до включения управления разворота рассчитывается по формуле (5) как

$$\tau_1 = \frac{z_1 - z_0}{\sin \psi_1 + u_z}. \quad (41)$$

Время завершения манёвра выведения на новую ЛЗП τ_k определяется по формулам (32), (39) в зависимости от типа управления согласно условиям таблицы 1 как $\tau_k = \tau_1 + \tau_p$. Промежуточные моменты времени τ'_j, τ''_j , отделяющие участки разгона/торможения, рассчитываются по формулам (20), (21).

Значения фазовых координат в характерных точках манёвра рассчитываются по формулам п. 2 и представлены в таблице 2.





Таблица 2 – Примеры синтеза управления и построения траекторий

№ примера	Начальные условия	Тип управления	Характерные точки траектории
1	Область Ω_{0-} : $z_0 = -6$; $\psi_0 = 2$	$\{0, -1\}$ «трапециевидное»	Точка начала разворота: $\tau_1 = 1,450$; $z_1 = -4,334$; $\psi_1 = 2$. Точка завершения разгона (начала разворота с постоянным креном): $\tau'_1 = 2,423$; $z'_1 = -3,160$; $\psi'_1 = 1,729$. Точка начала торможения (завершения разворота с постоянным креном): $\tau''_1 = 5,589$; $z''_1 = -0,086$; $\psi''_1 = 0,028$. Момент выключения управления (завершения разворота): $\tau_k = 6,563$.
2	Область Ω_{0+} : $z_0 = 3,5$; $\psi_0 = -2$	$\{0, +1\}$ «трапециевидное»	Точка начала разворота: $\tau_1 = 1,770$; $z_1 = 2,315$; $\psi_1 = -2$. Точка завершения разгона: $\tau'_1 = 2,744$; $z'_1 = 1,609$; $\psi'_1 = -1,729$. Точка начала торможения: $\tau''_1 = 5,007$; $z''_1 = 0,094$; $\psi''_1 = -0,513$. Момент выключения управления: $\tau_k = 5,981$.
3	Область Δ_{0-} : $z_0 = -0,8$; $\psi_0 = 0,2$	$\{0, -1\}$ «треугольное»	Точка начала разворота: $\tau_1 = 0,949$; $z_1 = -0,384$; $\psi_1 = 0,2$. Точка завершения разгона и начала торможения: $\tau'_1 = 1,827$; $z'_1 = 0,062$; $\psi'_1 = -0,021$. Момент выключения управления (завершения разворота): $\tau_k = 2,704$.
4	Область Δ_{0+} : $z_0 = 0,8$; $\psi_0 = -0,6$	$\{0, +1\}$ «треугольное»	Точка начала разворота: $\tau_1 = 1,629$; $z_1 = 0,271$; $\psi_1 = -0,6$. Точка завершения разгона и начала торможения: $\tau'_1 = 2,415$; $z'_1 = 0,050$; $\psi'_1 = -0,421$. Момент выключения управления: $\tau_k = 4,202$.

Было выполнено численное моделирование движения ЛА с учётом рассчитанных моментов переключения управления таблицы 2.

Траектории движения динамической системы на фазовой плоскости (z, ψ) при отрицательном и положительном «трапециевидном» управлении и начальных условиях числовых примеров №1, №2 таблицы 2 показаны на рисунке 4. Красными точками обозначены характерные состояния системы управления (начало движения на текущей ЛЗП – стадии подхода, начало непосредственного разворота, завершение манёвра), синими точками обозначены промежуточные состояния (завершение начального участка разгона, начало финального участка торможения), стрелками показано направление движения.



Траектории движения динамической системы на фазовой плоскости (z, ψ) при отрицательном и положительном «треугольном» управлении и начальных условиях числовых примеров №3, №4 таблицы 2 показаны на рисунке 5. Синими точками обозначены промежуточные состояния (завершение начального участка разгона и начало финального участка торможения).

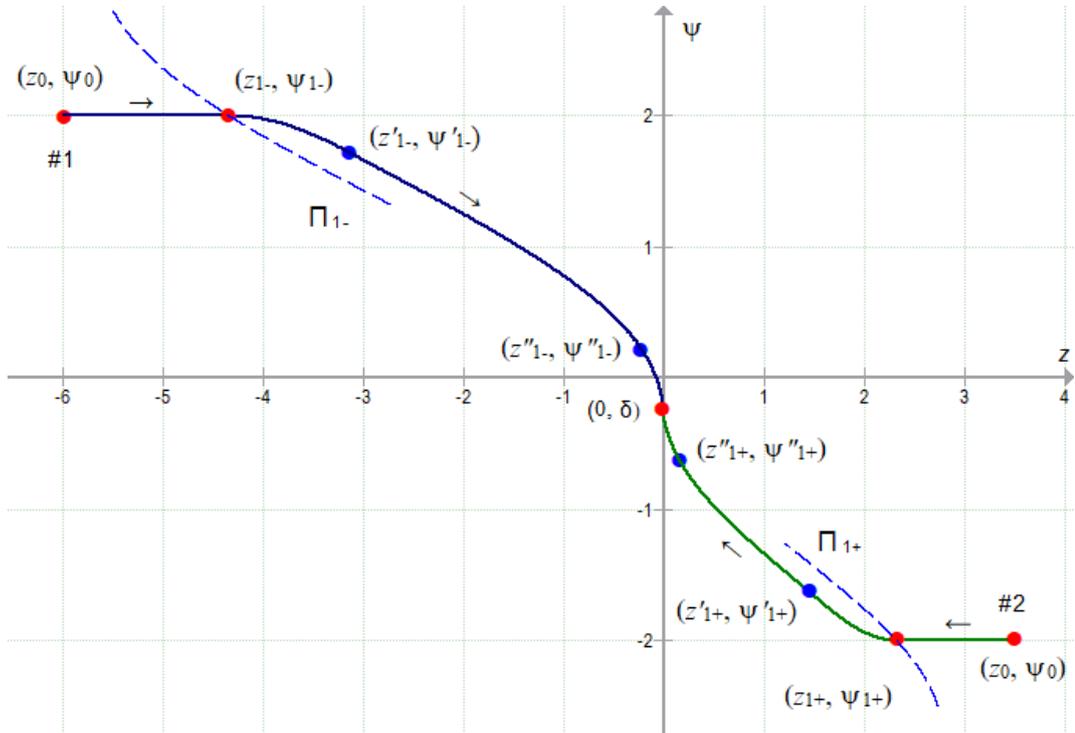


Рис. 4. Движение по фазовой плоскости при «трапецевидном» управлении

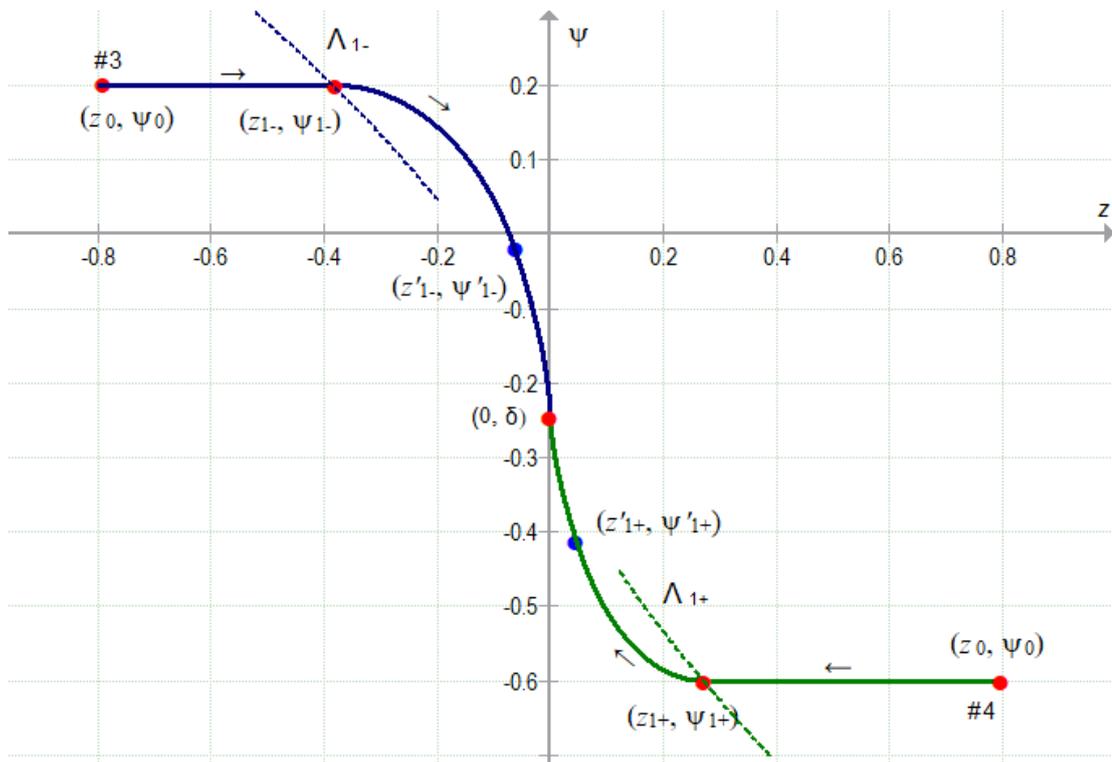


Рис. 5. Движение по фазовой плоскости при «треугольном» управлении



На рисунке 6 показаны временные зависимости угла курса для числовых примеров №1, №2 таблицы 2. На графиках явно выделены 4 участка: стадия предварительного движения подхода с постоянным углом курса до расчётного бокового упреждения разворота, квадратичное увеличение абсолютного значения угла курса на участке разгона, линейное изменение угла курса ЛА при постоянном максимально допустимом угле крена, квадратичное уменьшение абсолютного значения угла курса на участке торможения до достижения требуемого угла курса на новой ЛЗП.

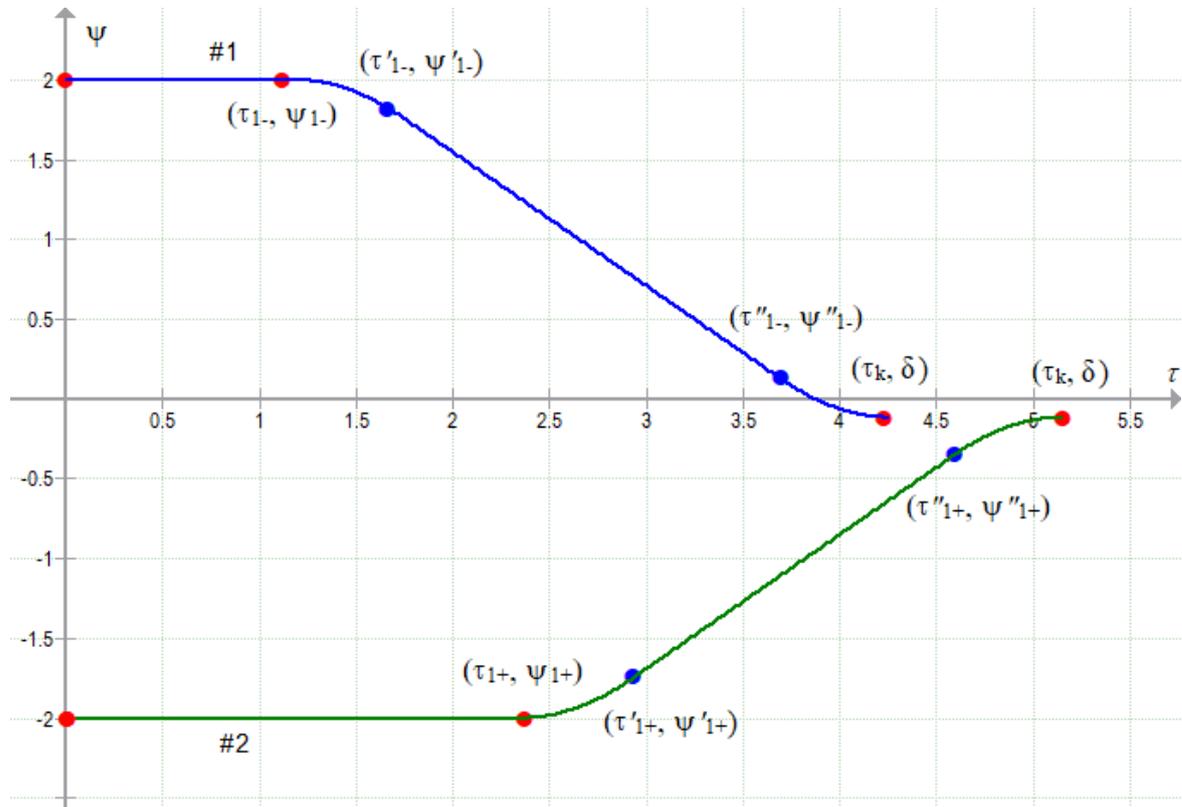


Рис. 6. Временные зависимости угла курса при «трапецевидном» управлении

На рисунке 7 показаны траектории движения горизонтального движения ЛА в системе координат новой ЛЗП, начало отсчёта координаты X совпадает с ППМ. Построены траектории движения ЛА при заданных относительных углах курса на начальной ЛЗП $\psi_0 = -120^\circ, -90^\circ, -60^\circ$.

Все траектории начинаются в точке с боковым отклонением $z_0 = 5$ ($Z_0 = 3,54$ км). Расчёт начального продольного расстояния относительно новой ЛЗП выполняется по формуле

$$x_0 = \frac{\cos \psi_1 + u_x}{\sin \psi_1 + u_z} z_0, \quad (42)$$

где $x_0 = X_0 \frac{g}{V^2}$ – нормированное продольное расстояние в момент начала движения; X_0 – размерное продольное расстояние в момент начала движения, м; $u_x = \frac{U_x}{V}$ – относительная скорость ветра вдоль по новой ЛЗП; U_x – скорость ветра вдоль по новой ЛЗП, м/с.

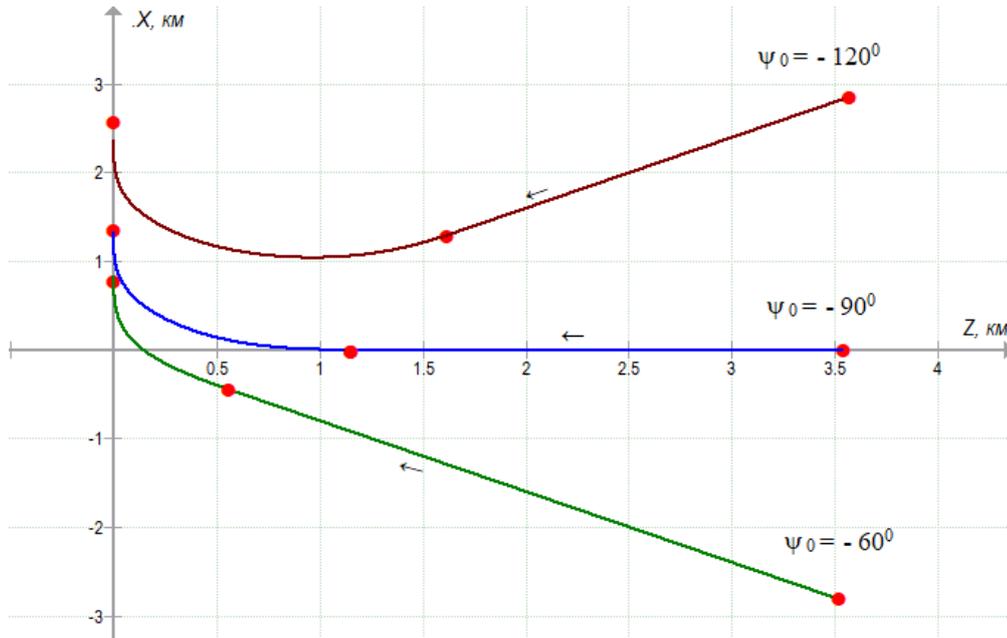


Рис. 7. Траектории ЛА в горизонтальной плоскости

Моделирование движения с учётом рассчитанных моментов переключения управления выполняется от начальных условий (z_0, ψ_0, x_0) с помощью уравнений (5) и нормированного уравнения продольного движения

$$\frac{dx}{d\tau} = \cos \psi + u_x. \quad (43)$$

Каждая траектория рисунка 7 имеет 3 характерные точки: начало движения, включение «трапецевидного» управления начала разворота с правым креном, выключения управления на новой ЛЗП.

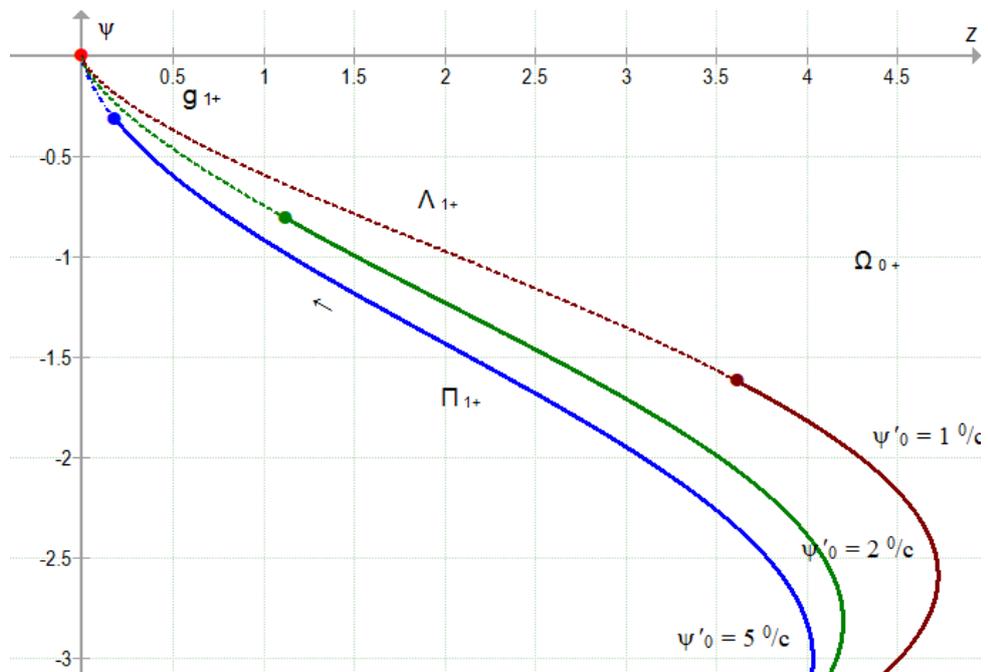


Рис. 8. Фазовые линии БУР при различных значениях угловой скорости γ'_0



На рисунке 8 показаны фазовые линии БУР $z_{1+}(\psi_1) = z_1$ управления с положительным углом крена Π_{1+} , Λ_{1+} для различных значений максимальной скорости изменения угла крена $\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)_{\max} = \gamma'_0 = 1^\circ/\text{с}, 2^\circ/\text{с}, 5^\circ/\text{с}$ и указанных ранее других параметров модели. На фазовых линиях отмечены точки, отделяющие управление «трапецевидного» и «треугольного» вида. При фиксированном значении начального угла курса ψ_1 величина БУР уменьшается с увеличением допустимой скорости угла крена γ'_0 («крутизны» функции угла крена на переходных участках).

Заключение

Представленный метод расчёта бокового упреждения разворота, синтеза управления и формирования траекторий движения обеспечивает оптимальную с точки зрения быстрейшего смену ЛЗП на маршруте с помощью одной «трапецевидной» или одной «треугольной» ступени управления по углу крена. Полученные выражения для определения типов областей начальных условий и «структуры» инерционного управления, формулы расчёта моментов участков функции угла крена и фазовых координат характерных точек траектории обеспечивают полное решение задачи оптимального и, в определённой степени, комфортного выведения ЛА на новую ЛЗП при маршрутном движении.

Рассмотренная методика может служить основой для решения многокритериальных задач оптимального управления движением ЛА, в частности, при использовании других критериев качества управления [11]. Кроме того, для описания инерционности, в зависимости от технологических и естественных особенностей органов управления, могут быть использованы другие математические модели.

Кроме того, при изменении угла атаки в процессе разворота выражение скорости (2) может быть уточнено

$$V(t) = \frac{V_0}{\sqrt{\cos\gamma(t)}} \sqrt{\frac{c_{y,0}}{c_y}} \quad (44)$$

где $c_{y,0}$ – коэффициент подъёмной силы ЛА при горизонтальном полёте этапа подхода; c_y – изменённый коэффициент подъёмной силы ЛА при развороте.

При учёте этого фактора представленные расчётные формулы претерпят незначительные изменения.

Предложенный алгоритм, обеспечивающий организацию маневрирования ЛА на маршруте, практически может быть использован в составе многометодных комплексов бортового навигационного оборудования летательных аппаратов и, в частности, при разработке планово-пилотажных приборов, а также в системах штурманской подготовки полётов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев, В. С.* Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография / В. С. Моисеев – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»), 2013. – 768 с.
2. *Кулифеев, Ю. Б.* Алгоритмы автоматического управления боковым движением ударного беспилотного летательного аппарата самолётного типа на воздушном участке полёта / Ю. Б. Кулифеев, М. М. Миронова // Труды МАИ. – 2015. – № 84. – 14 с.



3. *Диль В. Ф.* Синтез оптимального управления на основе уравнений нелинейной динамики / В. Ф. Диль, В. Н. Сизых // Научный Вестник МГТУ ГА. – 2017. – №3. – С. 139-148.
4. *Козарук В. В.* Навигационные эргатические комплексы самолётов / В. В. Козарук, Я. Ю. Ребо. – М.: Машиностроение, 1986. – 288 с.
5. *Алесов М. Б.* Оптимальное управление движением летательного аппарата при смене участка маршрута / М. Б. Алесов, А. А. Пляскина // Труды ГосНИИАС Серия: Вопросы авионики. – 2022. – №1 (56) – с. 22-36.
6. *Алесов М. Б.* Построение оптимальных траекторий при посадке летательного аппарата на движущийся корабль / М. Б. Алесов, А. А. Пляскина // Навигация и управление летательными аппаратами. – 2024. – № 1(44), – с. 2-23.
7. *Черноусько Ф. Л.* Методы управления механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 328 с.
8. *Александров В. М.* Вычисление оптимального управления линейной системой с инерционным управлением / В. М. Александров // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2015. – т. 18, № 1. – с. 1–13.
9. *Габасов Р.* Синтез оптимальных обратных связей в классе инерционных управлений / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, Н. С. Павленок // Автоматика и телемеханика. – 2003. – № 2. – с. 191-216.
10. *Шифрин М. Н.* Практическая аэродинамика самолёта Ан-2. / М. Н. Шифрин. – М.: Транспорт, 1972. – 200 с.
11. *Алесов М. Б.* Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении продольного перемещения / М. Б. Алесов // Навигация и управление летательными аппаратами. – 2022. – №4 (39). – с. 2-20.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алесов Михаил Борисович

Ведущий инженер, канд. техн. наук, доцент
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», филиал в СПб
Россия, 195009, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21
E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Ласточкин Антон Петрович

Заместитель начальника отдела
АО «КТ-Беспилотные Системы»
Россия, 199178, Санкт-Петербург, Малый пр. ВО, д. 54-5
E-mail: anton.lastochkin@kronshtadf.ru

Дата поступления: 11.02.2025

Дата принятия: 01.07.2025