



## ОПТИМАЛЬНОЕ НАВЕДЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ СМЕНЕ УЧАСТКА ПУТИ

**М. Б. Алесов, Е. В. Яковлева**

Раменское приборостроительное конструкторское бюро

Рассмотрена задача маневрирования летательного аппарата (ЛА) при смене линии заданного пути (ЛЗП) при условии пролёта контрольной точки «рядом». Выполнен синтез оптимального по критерию максимального быстродействия управления с учётом изменения воздушной скорости и угла атаки ЛА. Получены формулы расчёта моментов времени и условий включения управления с учётом ветровой нагрузки и заданного ограничения на управляющее воздействие – угол крена. Указаны области одноступенчатой управляемости на фазовой плоскости переменных состояния «боковое отклонение, угол курса». Представлены примеры расчёта оптимального управления при различных начальных параметрах подхода к новому участку пути и результаты численного моделирования наведения ЛА.

**Ключевые слова:** траекторное управление летательными аппаратами, оптимальное программное управление, критерий максимального быстродействия, боковое упреждение разворота.

**Для цитирования:**

Алесов, М. Б. Оптимальное наведение летательного аппарата при смене участка пути / М. Б. Алесов, Е. В. Яковлева // Системный анализ и логистика. – 2025. – № 5(48). – с. 10-19. DOI: 10.31799/2077-5687-2025-5-10-19.

## OPTIMAL GUIDANCE OF AIRCRAFT ON THE RUN COURSE-LINE CHANGE

**M. B. Alesov, E. V. Yakovleva**

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau

*The problem of maneuvering an aircraft on changing the run course-line of a given path provided control point "fly-by" is considered. The synthesis of optimal control according to the time criterion, taking into account the change in airspeed and angle of attack of the aircraft. Formulas for calculating the time points and conditions for control switching are obtained, taking into account the wind load and a given limitation on the control effect – the bank angle. The areas of singlestage controllability on the phase plane of the state variables "lateral deviation, heading angle" are pointed. Examples of calculating optimal control for various initial parameters of the approach to a new course-line of the path and the results of numerical simulation of aircraft guidance are presented.*

**Keywords:** trajectory control of aircraft, optimal programming control, time criterion, lateral turn preemption.

**For citation:**

Alesov, M. B. Optimal guidance of aircraft on the run course-line change / M. B. Alesov, E. V. Yakovleva // System analysis and logistics. – 2025. – № 5(48). – p. 10-19. DOI: 10.31799/2077-5687-2025-5-10-19.

### Введение

Одной из основных операций навигационного обеспечения летательного аппарата (ЛА) является переход с текущей на новую линию заданного пути (ЛЗП) при подлёте к контрольной точке пути (КТП).

При условии пролёта КТП «рядом» (fly-by), как правило, используется расчётное значение линейного упреждения разворота (ЛУР) до КТП, по достижении которого выполняется разворот с текущего активного на новый участок пути [1, 2]. Актуальной в практике летной эксплуатации ЛА является задача синтеза программного управления, которое обеспечит наибольшее быстродействие выхода на новую ЛЗП при ограничении величины управляющего воздействия (допустимого угла крена) и учёте постоянного влияния ветра.

Вопросы построения оптимальной по критерию максимального быстродействия траектории ЛА в горизонтальной плоскости из одной точки фазового пространства, заданной координатами и углом курса, в другую точку рассмотрены в работе Л. Е. Дубинса (L. E. Dubins) [3]. Синтез оптимального управления боковым траекторным движением ЛА с учётом влияния ветра выполнен в статье [4]. Общие вопросы синтеза программного управления



динамическими системами изложены в работах Ж. Атанса и П.Л. Фалба [5], В.Н. Афанасьева, В.Б. Колмановского, В. Р. Носова [6].

Данная статья посвящена синтезу программного управления, обеспечивающего оптимальность режима смены ЛЗП при ограничении величины управляющего воздействия (допустимого угла крена ЛА) в условиях постоянного влияния ветра и с учётом изменения воздушной скорости и угла атаки.

## 1 Модель движения и особенности управления

Будем полагать, что высота полёта ЛА при развороте не изменяется. Отсюда из условия сохранения баланса действующих на ЛА вертикальных сил воздушная скорость выполнения разворота равна

$$V(t) = \frac{V_0}{k_c \sqrt{\cos \gamma(t)}} , \quad (1)$$

где  $V_0$  – воздушная скорость ЛА при предварительном прямолинейном движении, м/с;  $t$  – время, с;  $\gamma$  – угол крена ЛА, рад;  $k_c$  – отношение аэродинамических коэффициентов подъёмной силы непосредственно при развороте  $c_y$  и прямолинейном  $c_{y,0}$  полёте

$$k_c = \sqrt{\frac{c_y}{c_{y,0}}} .$$

С учётом изменения воздушной скорости движение ЛА в боковом направлении относительно новой ЛЗП описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с переменными состояния  $Z$  и  $\psi$  [7]:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{V_0}{k_c \sqrt{\cos \gamma}} \sin \psi + U_z, \quad \frac{d\psi}{dt} = k_c \frac{g}{V_0} \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos \gamma}}, \quad (2)$$

где  $Z$  – боковое отклонение от новой ЛЗП (положительное значение – вправо), м;  $\psi$  – относительный угол курса (угол между направлением текущего курса ЛА и направлением новой ЛЗП, положительное значение отсчитывается вправо от ЛЗП), рад, допустимые значения курса  $-\pi \leq \psi \leq \pi$ ;  $U_z$  – поперечная составляющая скорости ветра относительно новой ЛЗП, м/с;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>.

Заменой переменных

$$\tau = t \frac{g}{V_0}, \quad z = Z \frac{g}{V_0^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V_0} \quad (3)$$

модель движения (2) сводится к системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{k_c \sqrt{\cos \gamma}} \sin \psi + u_z, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = k_c \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos \gamma}}, \quad (4)$$

где  $z$ ,  $\psi$  – переменные состояния (нормированное боковое отклонение и относительный курс);  $\tau$  – безразмерная переменная времени;  $u_z$  – параметр бокового ветра.



Задача управления боковым движением ЛА при условии пролёта КТП «рядом» (fly-by) формулируется следующим образом. При начальном значении бокового упреждения разворота (БУР) и угла курса на предыдущей ЛЗП

$$z(\tau_1) = z_1 = \text{БУР}, \quad \psi(\tau_1) = \psi_1 \quad (5)$$

следует перевести ЛА на новую ЛЗП, при этом конечное состояние должно быть равно:

$$z(\tau_k) = 0, \quad \psi(\tau_k) = \delta, \quad (6)$$

где  $\psi_1$  – известный относительный курс при подходе к ЛЗП;  $z_1$  – боковое отклонение в начале выполнения разворота;  $\tau_1$ ,  $\tau_k$  – моменты начала и окончания управления (не заданы и подлежат расчёту);  $\delta$  – обратный угол сноса на новой ЛЗП, равный  $\delta = -\arcsin \frac{U_z}{V} = -\arcsin u_z$  рад.

При этом величина БУР не задана и рассчитывается в процессе синтеза управления. Все параметры модели движения (2) полагаются заданными.

Схема перехода ЛА на новую ЛЗП и соответствующие состояния ЛА при горизонтальном маневрировании показаны на рисунке 1.

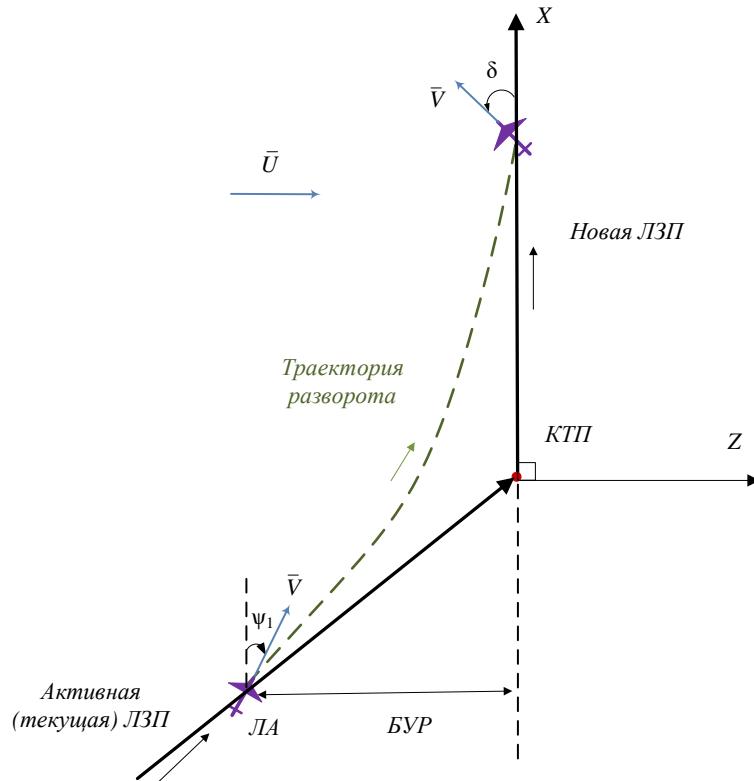


Рис. 1. Схема перехода ЛА на новую ЛЗП

На управление накладывается ограничение:

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma_0, \quad (7)$$

где  $\gamma_0$  – максимальное значение угла крена, рад,  $\gamma_0 > 0$ .



В качестве условия оптимальности выбрано требование максимального быстродействия (минимальной длительности процесса управления). Из принципа максимума Понтрягина Л.С. следует, что функция оптимального управления  $\gamma(\tau)$  должна иметь кусочно-постоянный вид [5] с «прямоугольной» ступенью управления  $\pm \gamma_0$ .

Символически ступеням можно дать соответствующие обозначения («+1» – положительная ступень управления, «-1» – отрицательная ступень и «0» – отсутствие управления) и описать возможные типы одноступенчатого управления при данном законе управления: {+1}, {-1}, {0, +1}, {0, -1}.

Изменение угла крена можно записать как [8]

$$\gamma(\tau) = \pm \gamma_0 \text{Hev}(\tau - \tau_1) \mp \gamma_0 \text{Hev}(\tau - \tau_k), \quad (8)$$

где  $\text{Hev}(\tau)$  – функция Хэвисайда.

## 2 Синтез оптимального управления

При условии пролёта КТП «рядом» (fly-by) реализуется одноступенчатое управление выхода на новую ЛЗП. Функция изменения угла курса ЛА при развороте определяется интегрированием второго уравнения движения (4) при постоянном угле крена  $\pm \gamma_0$

$$\psi(\tau) = \psi_1 \pm k_c \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{\cos \gamma_0}} (\tau - \tau_1), \quad (9)$$

где знаки « $\pm$ » соответствуют положительной (верхний знак) или отрицательной (нижний знак) ступени управления соответственно.

Учёт краевых условий (5), (6) позволяет получить длительность разворота:  $\tau_p = \tau_k - \tau_1$

$$\tau_p = \pm \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\delta - \psi_1), \quad (10)$$

или в исходных размерных переменных  $t_p = t_k - t_1$

$$t_p = \pm \frac{V_0}{g} \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\delta - \psi_1). \quad (11)$$

Изменение бокового отклонения при развороте определяется интегрированием первого уравнения движения (4) при постоянном угле крена  $\pm \gamma_0$

$$z(\tau) = z_1 \mp \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} [\cos(\psi_1 \pm k_c \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{\cos \gamma_0}} (\tau - \tau_1)) - \cos \psi_1] + u_z (\tau - \tau_1). \quad (12)$$

С учётом граничных условий (5), (6) нормированное значение БУР запишется как

$$z_1 = \pm \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} (\cos \delta - \cos \psi_1) \mp \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\delta - \psi_1) u_z, \quad (13)$$



или в размерных переменных

$$Z_1 = \pm \frac{V_0^2}{g} \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} (\cos \delta - \cos \psi_1) \mp \frac{V_0}{g} \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\delta - \psi_1) U_z. \quad (14)$$

Зависимость (13) представляет собой фазовую линию начальных условий одноступенчатого управления  $\Gamma_{\pm} = \{(z, \psi) | z_{1\pm}(\psi_1)\}$ , содержащую точки фазовой плоскости, из которых возможно непосредственно перейти на новую ЛЗП с помощью одной ступени управления.

Таким образом, при условии пролёта КТП «рядом» вначале выполняется прямолинейное движение по текущей активной ЛЗП с курсом  $\psi = \psi_1$  до достижения величины бокового упреждения разворота (БУР), определяемой формулой (13) при  $z_1 = \text{БУР}$ . После чего производится разворот, длительность которого рассчитывается по формуле (10), до достижения нулевого отклонения и требуемого угла курса  $\psi(\tau_k) = \delta$  на новой ЛЗП.

Длительность прямолинейного движения по предыдущей ЛЗП от некоторой исходной точки  $(z_0, \psi_0)$  до начала непосредственного разворота рассчитывается по формулам (2), (4) и равна

$$\tau_1 - \tau_0 = \frac{z_1 - z_0}{\frac{\sin \psi_0}{k_c} + u_x}, \quad \psi_1 = \psi_0, \quad (15)$$

или в размерных переменных

$$t_1 - t_0 = \frac{Z_1 - Z_0}{\frac{V_0}{k_c} \sin \psi_0 + U_z}, \quad \psi_1 = \psi_0, \quad (16)$$

где  $\tau_0, t_0$  – начальный момент времени подхода к новой ЛЗП, когда ЛА выполняет прямолинейное движение по предыдущей ЛЗП к КТП;  $z_0, Z_0$  – начальное боковое отклонение точки подхода на предыдущей ЛЗП;  $\psi_0$  – начальный относительный угол курса при подходе на предыдущей ЛЗП.

На фазовой области  $(z, \psi)$  выделяются 2 области подхода к ЛЗП  $\Omega_{0+}, \Omega_{0-}$ , определяющих тип управления  $\{0, +1\}, \{0, -1\}$  соответственно и ограниченных линиями включения управления соответствующего знака  $\Gamma_+, \Gamma_-$  формул (13). На рисунке 2 показаны эти области, линии переключения управления и примеры траекторий при выполнении пролёта КТП «рядом». Кроме того, имеются области фазовой плоскости, из которых новая ЛЗП недостижима при начальном прямолинейном движении, они обозначены как  $\Omega_{\text{нед}}$ . Эти области соответствуют значительным траекториальным ошибкам при движении по предыдущей ЛЗП и вывод ЛА на новую ЛЗП в этом случае не может быть выполнен с помощью одноступенчатого управления.

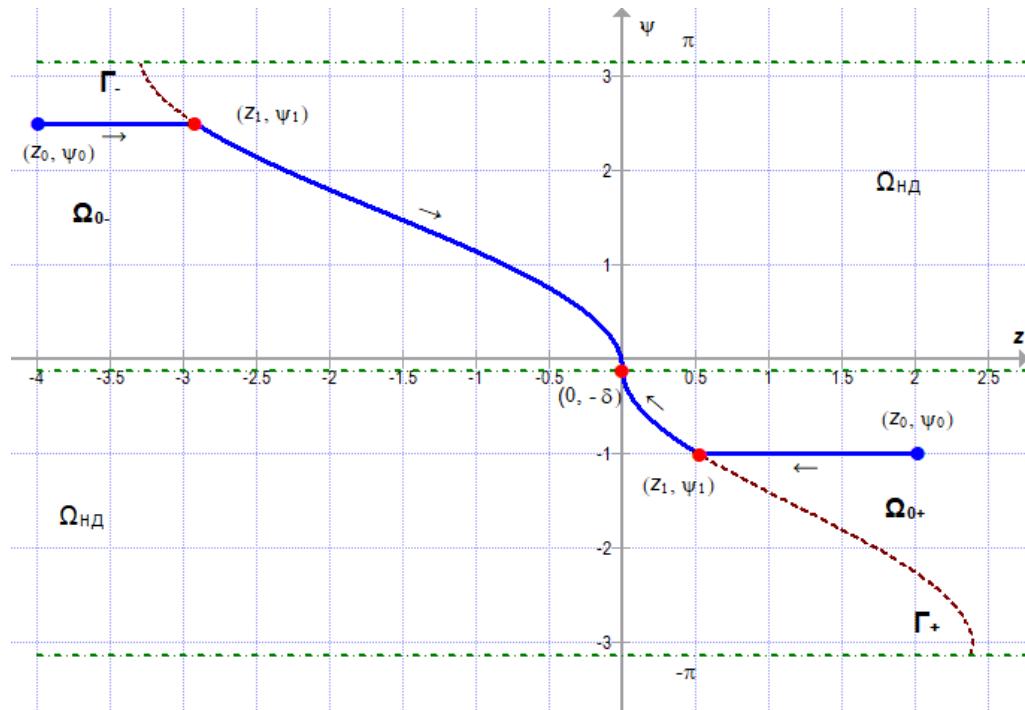


Рис. 2. Области управления и примеры движения на фазовой плоскости

В таблице 1 дано формальное определение областей управляемости для новой ЛЗП и указаны условия включения/выключения управления. При логической записи областей используются следующие определения надграфика (эпиграфа) и подграфика (гипографа):

$$\text{епи } z_1 \equiv \{(\psi_0, z_0) \in \Omega_\psi \times (-\infty, +\infty) \mid z_0 > z_1(\psi_0)\},$$

$$\text{hyp } z_1 \equiv \{(\psi_0, z_0) \in \Omega_\psi \times (-\infty, +\infty) \mid z_0 < z_1(\psi_0)\},$$

где  $z_1(\psi_0)$  – функциональная зависимость фазовых переменных, формула (13);  $\Omega_\psi$  – заданная область определения переменной  $\psi_0$  в функциональной зависимости  $z_1(\psi_0)$ .

Таблица 1 – Области управляемости для новой ЛЗП и условия переключения управления

Обозн ачени е	Тип управления	Определение области $\{(z_0, \psi_0)\}$	Условия включения / выключения ступени
$\Omega_{0+}$	Одна положительная ступень $\{0, +1\}$ .	При $\Omega_\psi = (-\pi, -\delta)$ область $(\psi_0, z_0) \in \text{епи } z_{1+}$ .	Включение при $z = z_+(\psi)$ , формула (13). Выключение при $z = 0$ , $\psi = \delta$ , условия (6).
$\Omega_{0-}$	Одна отрицательная ступень $\{0, -1\}$ .	При $\Omega_\psi = (-\delta, \pi)$ область $(\psi_0, z_0) \in \text{hyp } z_{1-}$ .	Включение при $z = z_-(\psi)$ , формула (13). Выключение при $z = 0$ , $\psi = \delta$ , условия (6).

### 3 Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры синтеза управления для смены ЛЗП при следующих параметрах модели движения: воздушная скорость летательного аппарата  $V_0 = 600$  км/час; поперечная составляющая скорости ветра  $U_Z = 20$  м/с; максимальное значение крена  $\gamma_0$  принято равным



45<sup>0</sup>; обратный угол сноса на новой ЛЗП  $\delta$  равен  $-7^0$ ; отношение коэффициентов подъёмной силы  $k_c$  принято 1. Нормированные безразмерные переменные (3) записываются:

$$\tau = 0,06 t; \quad z = 0,35 Z; \quad u_z = 0,12,$$

где переменная  $Z$  измеряется в километрах, а время  $t$  – в секундах.

На фазовой плоскости  $(z, \psi)$  рисунка 2 показаны линии включения управления (начала разворота) и области начальных условий для указанных числовых значений параметров задачи.

Числовые значения характерных точек движения при различных условиях пролета КТП и типах управления, рассчитанные по формулам п. 2, представлены в таблице 2.

Выполнено численное моделирование движения ЛА согласно формулам (2), (4) и расчётного времени начала и окончания разворота, причём процесс начинается при указанных значениях  $(z_0, \psi_0)$  точки подхода и отсчёт времени выполняется именно от этого момента  $\tau_0 = 0$ . На фазовой плоскости  $(z, \psi)$  рисунка 2 показано движение ЛА, соответствующее примерам 1 и 2 таблицы 2.

Таблица 2 – Примеры синтеза управления при смене ЛЗП

Пример	Начальные условия	Тип управления	Характерные значения
1	$z_0 = 2;$ $\psi_0 = \psi_1 = -1.$	{0, +1}, один правый разворот.	Точка начала разворота: $\psi_1 = -1; z_1 = 0,514; \tau_1 = 2,059.$ Длительность разворота: $\tau_k - \tau_1 = 1,046.$
2	$z_0 = -4;$ $\psi_0 = \psi_1 = 2,5.$	{0, -1}, один левый разворот.	Точка начала разворота: $\psi_1 = 2,5; z_1 = -2,911; \tau_1 = 1,516.$ Длительность разворота: $\tau_k - \tau_1 = 3,116$

На рисунке 3 показаны временные зависимости бокового отклонения  $z(\tau)$  для числовых примеров №1, №2 таблицы 2. На графиках явно выделены 2 участка: предварительное движение с линейным изменением отклонения по начальному участку подхода текущей ЛЗП до расчётного бокового упреждения разворота и, далее, нелинейное изменение бокового отклонения при постоянном максимально допустимом угле крена до достижения новой ЛЗП.

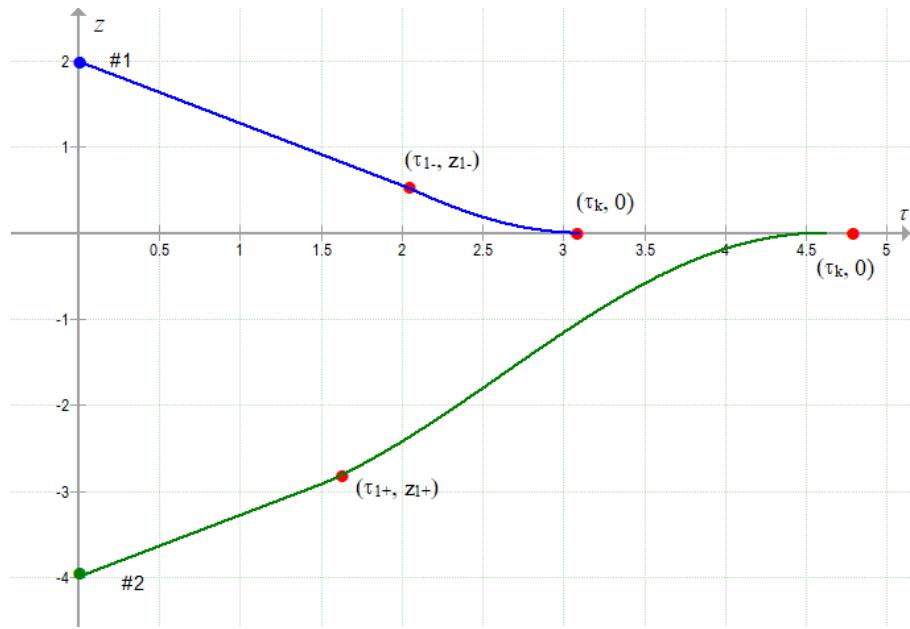


Рис. 3. Временные зависимости бокового отклонения

На рисунке 4 показаны временные зависимости относительного угла курса  $\psi(\tau)$  для числовых примеров №1, №2 таблицы 2.

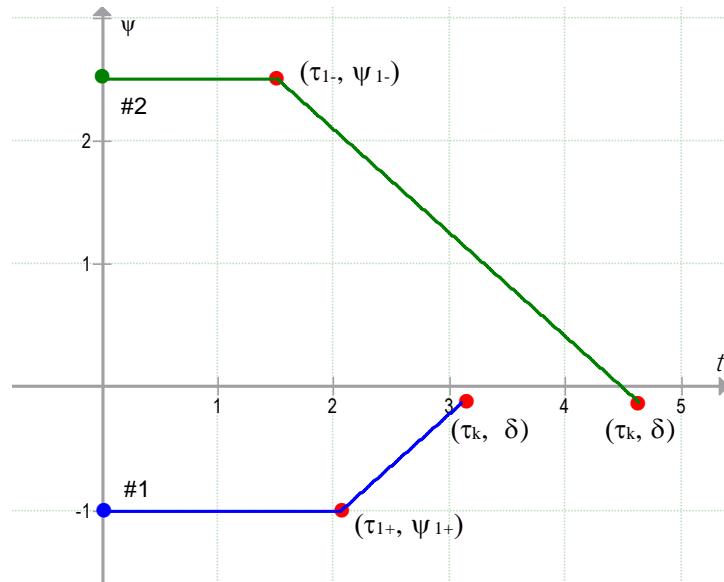


Рис. 4. Временные зависимости относительного угла курса

На рисунке 5 показаны траектории движения ЛА на горизонтальной плоскости в координатах  $(Z, X)$  для примеров 1, 2, числовые значения координат даны в километрах. Движение ЛА вдоль новой ЛЗП описывается уравнением

$$\frac{dX}{dt} = \frac{V_0}{k_c \sqrt{\cos \gamma}} \cos \psi + U_x, \quad (17)$$

где  $U_x$  – продольная составляющая скорости ветра, в примерах полагается нулевой.

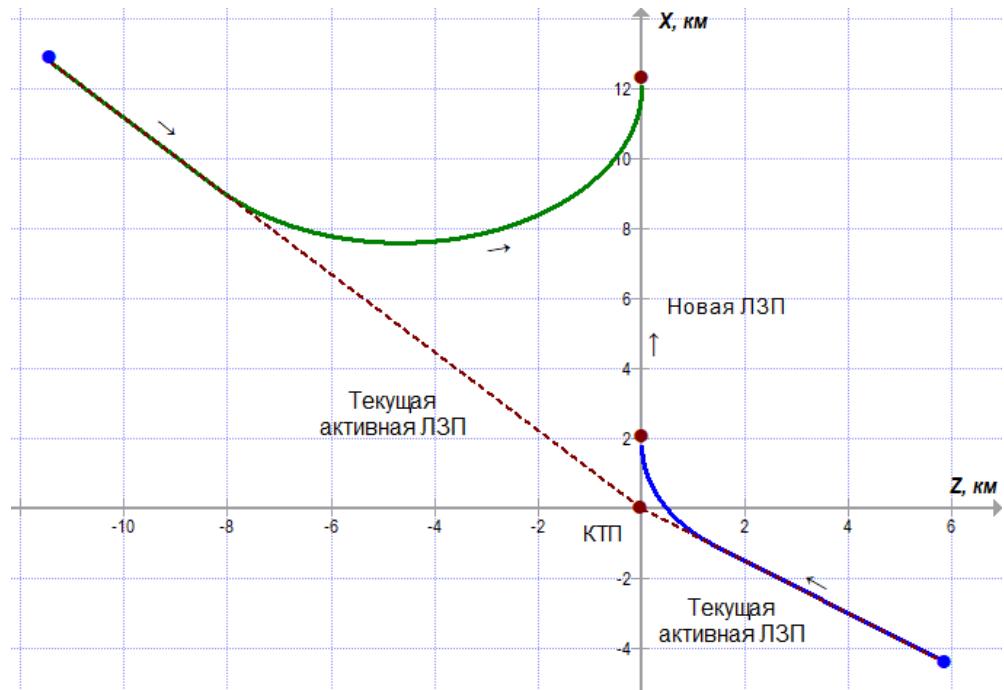


Рис. 5. Движение по горизонтальной плоскости при пролете КТП «рядом»

Для программной реализации управления можно применить два способа:

- 1) используя текущее состояние бокового отклонения  $z$ , включить управление непосредственного разворота при достижении линии БУР фазовой плоскости («геометрический» способ) согласно условиям, указанным в таблице 1;
- 2) при подходе к КТП рассчитать моменты включения и выключения управления и реализовывать циклограмму управления по текущему времени согласно формулам (10), (11), (15), (16).

Следует отметить определенную робастность первого способа, обеспечивающего выполнение маневра даже при ошибках в начальных значениях переменных состояния (угла курса и бокового отклонения).

### Заключение

Представленный метод синтеза управления и расчёта БУР обеспечивает оптимальную и кратчайшую по времени смену ЛЗП траектории с помощью одной ступени максимального по абсолютной величине управления, учитывая изменение воздушной скорости и угла атаки при непосредственном развороте ЛА.

Рассмотренная методика может служить основой для решения многокритериальных задач оптимального управления движением ЛА, в частности, при использовании других критериев качества управления [8], [9], а также при учёте инерционности управления [10].

На практике алгоритм может быть применён при разработке многометодных комплексов пилотажно-навигационного обеспечения летательных аппаратов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография / В. С. Моисеев.* – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»), 2013. – 768 с.
2. Кулифеев Ю.Б., Миронова М.М. Алгоритмы автоматического управления боковым



движением ударного беспилотного летательного аппарата самолётного типа на воздушном участке полёта // Труды МАИ. – 2015. – № 84. – 14 с.

3. *Dubins L. E. On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents / L. E. Dubins // Am. J. of Math. – 1957. – 79 (3). – P. 497–516.*
4. *Алесов М. Б. Оптимальное управление движением летательного аппарата при смене участка маршрута / М. Б. Алесов, А. А. Пляскина // Труды ГосНИИАС Серия: Вопросы авионики. – 2022. – №1 (56). – С. 22-36.*
5. *Атанс Ж. Оптимальное управление / Ж. Атанс, П. Л. Фалб. – М.: Машиностроение, 1968. 764 с.*
6. *Афанасьев В. Н. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.*
7. *Динамика полёта / Мхитарян А.М. [и др.]. – М.: Машиностроение, 1978. – 424 с.*
8. *Бабаджанянц Л. К. Управление по критерию расхода в механических системах / Л. К. Бабаджанянц, И. Ю. Потоцкая. – СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2003. – 137 с.*
9. *Алесов М. Б. Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении длительности маневрирования // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. – 2020. – №10. – С. 29-34.*
10. *Алесов М. Б. Траектории смены участка маршрута с учётом изменения воздушной скорости летательного аппарата / М. Б. Алесов, А. П. Ласточкин // Системный анализ и логистика. – № 2(45). – 2025. – С. 10-28.*

## ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

### Алесов Михаил Борисович

Ведущий инженер, канд. техн. наук, доцент  
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», филиал в СПб  
195009, Россия, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21  
E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

### Яковлева Елизавета Вадимовна

Техник  
АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», филиал в СПб  
195009, Россия, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21  
E-mail: evyakovleva@spb.rpkb.ru

## INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

### Alesov Mikhail Borisovich

Lead engineer, PhD. Tech. Sciences, associate Professor  
Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp  
21, Mikhailova str., Saint-Petersburg, 195009, Russia  
E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

### Yakovleva Elizaveta Vadimovna

Technician  
Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp  
21, Mikhailova str., Saint-Petersburg, 195009, Russia  
E-mail: evyakovleva@spb.rpkb.ru

Дата поступления: 20.10.2025

Дата принятия: 26.10.2025