



ОПТИМАЛЬНОЕ НАВЕДЕНИЕ ЛЕТАТЕЛЬНОГО АППАРАТА ПРИ СМЕНЕ УЧАСТКА ПУТИ «ПРОЛЁТОМ»

М. Б. Алесов, Е. В. Яковлева

Раменское приборостроительное конструкторское бюро

Рассмотрена задача маневрирования летательного аппарата (ЛА) при смене линии заданного пути (ЛЗП) при условии пролёта над контрольной точкой. Выполнен синтез оптимального по критерию максимального быстродействия управления с учётом изменения воздушной скорости и угла атаки ЛА. Получены формулы расчёта моментов времени и условий переключения управления с учётом ветровой нагрузки и заданного ограничения на управляющее воздействие – угол крена. Указаны интервалы управляемости и линии переключения управления на фазовой плоскости переменных состояния «боковое отклонение, угол курса». Представлены примеры расчёта оптимального управления и построения соответствующих траекторий наведения ЛА при различных начальных параметрах подхода к новому участку пути, а также результаты численного моделирования.

Ключевые слова: траекторное управление летательными аппаратами, оптимальное программное управление, критерий максимального быстродействия, кусочно-постоянное управление.

Для цитирования:

Алесов, М. Б. Оптимальное наведение летательного аппарата при смене участка пути «пролётом» / М. Б. Алесов, Е. В. Яковлева // Системный анализ и логистика. – 2026. – № 1(49). – с. 14-23. DOI: 10.31799/2077-5687-2026-1-14-23.

OPTIMAL GUIDANCE OF AIRCRAFT ON THE RUN COURSE-LINE CHANGE «FLY-OVER»

M. B. Alesov, E. V. Yakovleva

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp

The problem of maneuvering an aircraft on changing the run course-line of a given path provided control point "fly-over" is considered. The synthesis of optimal control according to the time criterion, taking into account the change in airspeed and angle of attack of the aircraft. Formulas for calculating the time moments and conditions for control switching are obtained, taking into account the wind load and a given limitation on the control effect – the bank angle. The intervals of controllability on the phase plane of the state variables "lateral deviation, heading angle" are pointed. Examples of calculating optimal control and guidance trajectories of an aircraft for various initial parameters of the approach to a new course-line of the path and the results of numerical simulation are presented.

Keywords: trajectory control of aircraft, optimal programming control, time criterion, piecewise constant control.

For citation:

Alesov, M. B. Optimal guidance of aircraft on the run course-line change «fly-over»/ M. B. Alesov, E. V. Yakovleva // System analysis and logistics. – 2026. – № 1(49). – p. 14-23. DOI: 10.31799/2077-5687-2026-1-14-23.

Введение

Одной из основных операций навигационного обеспечения летательного аппарата (ЛА) является переход с текущей на новую линию заданного пути (ЛЗП) при пролёте контрольной точки пути (КТП) «над» (fly-over). Актуальной в практике летной эксплуатации ЛА является задача синтеза программного управления, которое обеспечивает максимальное быстродействие выхода на новую ЛЗП при ограничении величины управляющего воздействия (допустимого угла крена) и учёте постоянного влияния ветра [1, 2].

Вопросы построения оптимальной по критерию максимального быстродействия траектории ЛА в горизонтальной плоскости из одной точки фазового пространства, заданной координатами и углом курса, в другую точку рассмотрены в работе Л. Е. Дубинса (L. E. Dubins) [3]. Синтез оптимального управления боковым траекторным движением ЛА с учётом влияния ветра выполнен в статье [4]. Общие вопросы синтеза программного управления динамическими системами изложены в работах Ж. Атанса и П. Л. Фалба [5], В. Н. Афанасьева, В. Б. Колмановского, В. Р. Носова [6].



Данная статья посвящена синтезу программного управления и построения оптимальной траектории выведения ЛА на новую ЛЗП при ограничении величины управляющего воздействия, в условиях постоянного влияния ветра, с учётом изменения воздушной скорости и угла атаки ЛА.

1. Модель движения и особенности управления

Будем полагать, что высота полёта ЛА при развороте не изменяется. Отсюда из условия сохранения баланса действующих на ЛА вертикальных сил воздушная скорость выполнения манёвра равна

$$V(t) = \frac{V_0}{k_c \sqrt{\cos \gamma(t)}}, \quad (1)$$

где V_0 – воздушная скорость ЛА при предварительном прямолинейном движении, м/с; t – время, с; γ – текущий угол крена ЛА, рад; k_c – отношение аэродинамических коэффициентов подъёмной силы непосредственно при развороте c_y и прямолинейном горизонтальном полёте $c_{y,0}$

$$k_c = \sqrt{\frac{c_y}{c_{y,0}}}.$$

С учётом изменения воздушной скорости движение ЛА в боковом направлении относительно новой ЛЗП описывается системой двух нелинейных дифференциальных уравнений с переменными состояния Z и ψ [7]:

$$\frac{dZ}{dt} = \frac{V_0}{k_c \sqrt{\cos \gamma}} \sin \psi + U_z, \quad \frac{d\psi}{dt} = k_c \frac{g}{V_0} \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos \gamma}}, \quad (2)$$

где Z – боковое отклонение от новой ЛЗП (положительное значение – вправо), м; ψ – относительный угол курса (угол между направлением текущего курса ЛА и направлением новой ЛЗП, положительное значение отсчитывается вправо от ЛЗП), рад, допустимые значения курса $-\pi/2 \leq \psi \leq \pi/2$; U_z – поперечная составляющая скорости ветра относительно новой ЛЗП, м/с; g – ускорение свободного падения, м/с².

Заменой переменных

$$\tau = t \frac{g}{V_0}, \quad z = Z \frac{g}{V_0^2}, \quad u_z = \frac{U_z}{V_0} \quad (3)$$

модель движения (2) сводится к системе нормированных уравнений:

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{k_c \sqrt{\cos \gamma}} \sin \psi + u_z, \quad \frac{d\psi}{d\tau} = k_c \frac{\sin \gamma}{\sqrt{\cos \gamma}}, \quad (4)$$

где z , ψ – переменные состояния (нормированное боковое отклонение и относительный угол курса); τ – безразмерная переменная времени; u_z – параметр бокового ветра.

Задача управления боковым движением ЛА при условии пролёта КТП «над» (fly-over) формулируется следующим образом. При нулевом значении бокового упреждения и начальном значении угла курса в момент пролёта КТП



$$z(\tau_1) = 0, \quad \psi(\tau_1) = \psi_1 \quad (5)$$

следует перевести ЛА на новую ЛЗП, при этом конечное состояние должно быть равно:

$$z(\tau_k) = 0, \quad \psi(\tau_k) = \delta, \quad (6)$$

где ψ_1 – известный относительный курс при пролёте КТП; τ_1, τ_k – нормированные моменты начала и окончания манёвра; δ – обратный угол сноса на новой ЛЗП, равный $\delta = -\arcsin \frac{U_z}{V} = -\arcsin u_z$ рад.

В качестве управления используется функция угла крена $\gamma(\tau)$, при этом длительность манёвра не задана и рассчитывается в процессе синтеза управления. Все параметры модели движения (2) полагаются заданными.

Схема перехода ЛА на новую ЛЗП и соответствующие состояния ЛА при горизонтальном маневрировании показаны на рисунке 1.

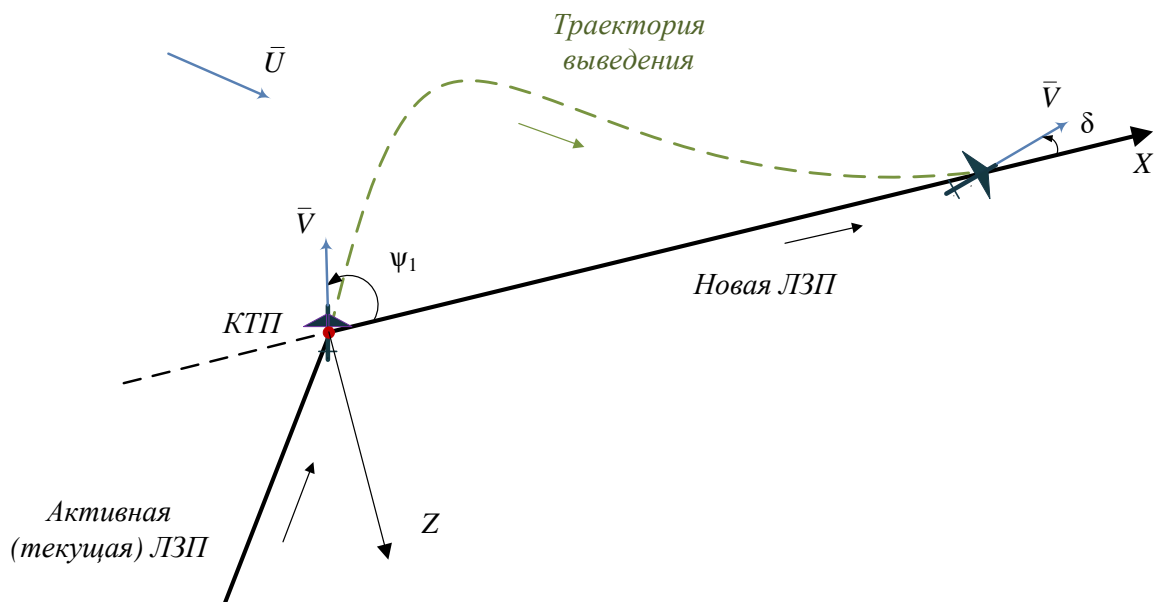


Рис. 1. Схема перехода ЛА на новую ЛЗП пролётом «над» КТП

На управление накладывается ограничение:

$$|\gamma(\tau)| \leq \gamma_0, \quad (7)$$

где γ_0 – максимальное значение угла крена, рад, $\gamma_0 > 0$.

В качестве условия оптимальности выбрано требование максимального быстродействия (минимальной длительности процесса управления). Из принципа максимума Понтрягина Л. С. следует, что функция оптимального управления $\gamma(\tau)$ должна иметь кусочно-постоянный вид с двумя прямоугольными конечными импульсами (ступенями) противоположного знака $\pm \gamma_0$ [4], [5]. Возможные функции кусочно-постоянного управления показаны на рисунке 2.

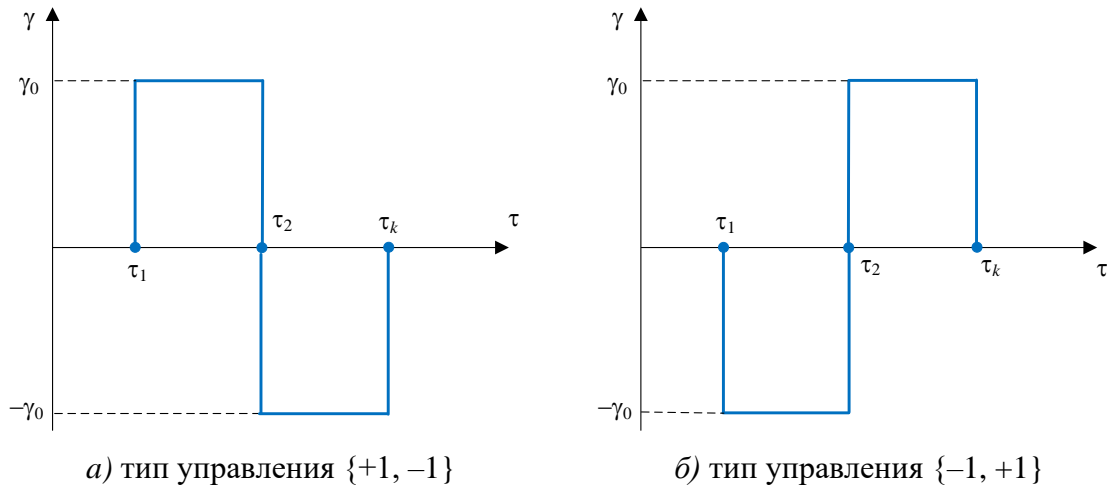


Рис. 2. Возможные формы функции угла крена $\gamma(\tau)$

Символически «ступеням» можно дать соответствующие обозначения («+1» – положительная «ступень» управления, «-1» – отрицательная «ступень»). Возможные типы «двухступенчатого» управления при пролёте «над»: $\{+1, -1\}$, $\{-1, +1\}$ [5]. Особый случай с промежуточным движением без управления (прямолинейное движение с углом курса $\pm \pi/2$) может понадобиться при очень значительном боковом ветре и здесь рассматриваться не будет.

Изменение угла крена можно записать как [8]

$$\gamma(\tau) = \pm \gamma_0 \text{Hev}(\tau - \tau_1) \mp 2\gamma_0 \text{Hev}(\tau - \tau_2) \pm \gamma_0 \text{Hev}(\tau - \tau_k), \quad (8)$$

где $\text{Hev}(\tau)$ – функция Хэвисайда, бесконечная единичная «ступень» при положительных $\tau > 0$.

2. Решение уравнений движения

При условии пролёта КТП «над» (fly-over) реализуется «двухступенчатое» управление выхода на новую ЛЗП. Рассмотрим вначале решение уравнений движения для отдельной «ступени» управления, соответствующей постоянному значению угла крена $\pm \gamma_0$.

Функция изменения угла курса ЛА при угле крена $\pm \gamma_0$ для «ступени» с номером $i = 1, 2$ определяется интегрированием второго уравнения движения (4)

$$\psi_i(\tau) = \hat{\psi}_i \pm k_c \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{\cos \gamma_0}} (\tau - \tau_i), \quad (9)$$

где $\hat{\psi}_i$ – значение угла крена в момент начала «ступени» с номером i ; τ_i – момент времени начала «ступени» с номером i ; знаки « \pm » соответствуют положительной (верхний знак) или отрицательной (нижний знак) «ступени» управления соответственно.

Учёт краевых значений «ступени» позволяет получить длительность «ступени»:

$$\begin{aligned} \Delta \tau_i &= \tau_{i+1} - \tau_i \\ \Delta \tau_i &= \pm \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\hat{\psi}_{i+1} - \hat{\psi}_i), \end{aligned} \quad (10)$$

Изменение бокового отклонения определяется интегрированием первого уравнения



движения (4) при постоянном угле крена $\pm \gamma_0$

$$z_i(\tau) = \hat{z}_i \mp \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} \left[\cos(\hat{\psi}_i \pm k_c \frac{\sin \gamma_0}{\sqrt{\cos \gamma_0}} (\tau - \tau_i)) - \cos \hat{\psi}_i \right] + u_z (\tau - \tau_i), \quad (11)$$

где \hat{z}_i – значение бокового отклонения в момент начала «ступени» с номером i .

Значение бокового отклонения в конце «ступени» с учётом подстановки длительности (10) запишется как

$$\hat{z}_{i+1} = \hat{z}_i \mp \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} (\cos \hat{\psi}_{i+1} - \cos \hat{\psi}_i) \pm \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\hat{\psi}_{i+1} - \hat{\psi}_i) u_z. \quad (12)$$

3. Синтез оптимального управления

Запишем изменение бокового отклонения для первой и второй «ступени» управления (12) с учётом заданных краевых условий задачи (5), (6). В результате получим систему двух уравнений с двумя неизвестными – переменными состояния в точке переключения управления ($\hat{z}_2, \hat{\psi}_2$):

$$\hat{z}_2 = 0 \mp \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} (\cos \hat{\psi}_2 - \cos \hat{\psi}_1) \pm \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\hat{\psi}_2 - \hat{\psi}_1) u_z, \quad (13)$$

$$0 = \hat{z}_2 \pm \frac{1}{k_c^2 \sin \gamma_0} (\cos \delta - \cos \hat{\psi}_2) \mp \frac{\sqrt{\cos \gamma_0}}{k_c \sin \gamma_0} (\delta - \hat{\psi}_2) u_z, \quad (14)$$

Система сводится к тригонометрическому уравнению относительно угла курса переключения управления $\hat{\psi}_2$

$$\cos \hat{\psi}_2 - k_c \sqrt{\cos \gamma_0} \hat{\psi}_2 u_z = \frac{\cos \delta + \cos \hat{\psi}_1}{2} - k_c \sqrt{\cos \gamma_0} \frac{\delta + \hat{\psi}_1}{2} u_z. \quad (15)$$

При начальном значении угла курса $|\hat{\psi}_1| \leq \frac{\pi}{2}$ интервал расположения корня уравнения:

$\hat{\psi}_2 \in (\delta, \frac{\pi}{2})$ для управления с первой положительной «ступенью» и $\hat{\psi}_2 \in (-\frac{\pi}{2}, \delta)$ для управления с первой отрицательной «ступенью».

При отсутствии ветра угол курса $\hat{\psi}_2$ может быть вычислен явно

$$\hat{\psi}_2 = \pm \arccos \frac{1 + \cos \hat{\psi}_1}{2} \quad (16)$$

и использоваться в качестве начального приближения решения уравнения (15).

Соответствующее боковое отклонение \hat{z}_2 может быть вычислено по формуле (13) или (14). Таким образом, будут известны значения переменных состояния во всех характерных точках-постоянной функции управления (включения, переключения и выключения). Изменения переменных состояния на интервалах кусочно-постоянного управления может быть рассчитаны по формулам (9), (11).

Управление может быть реализовано по циклограмме формулы (8), используя характерные моменты времени $\tau_1 = 0, \tau_2, \tau_k$, определяемые по формуле (10).

Зависимость (12) для второй «ступени» ($i=2$) при $\hat{z}_3 = \hat{z}_k = 0, \hat{\psi}_3 = \hat{\psi}_k = \delta$ представляет



собой фазовую линию переключения управления $\Gamma_{2\pm} = \{(z_{2\pm}, \psi_{2\pm}) | z_{2\pm}(\psi_{2\pm})\}$, содержащую точки фазовой плоскости, из которых возможно непосредственно перейти на новую ЛЗП с помощью одной финальной «ступени» управления.

Таким образом, при условии пролёта КТП «над» вначале выполняется разворот с максимальным углом крена $\pm \gamma_0$ до достижения фазовой линии переключения управления $\Gamma_{2\mp}$, после чего производится разворот на новую ЛЗП с противоположным углом крена $\mp \gamma_0$.

На координатной линии (z, ψ) фазовой области выделяются 2 интервала подхода к ЛЗП $\Omega_{+-} = \{(z, \psi) | z = 0, \psi \in (-\pi/2, \delta)\}$, $\Omega_{-+} = \{(z, \psi) | z = 0, \psi \in (\delta, \pi/2)\}$, определяющих тип управления $\{+1, -1\}$, $\{-1, +1\}$ соответственно. На рисунке 3 показаны фазовые линии переключения управления $\Gamma_{2\pm}$ и примеры траекторий при выполнении пролёта КТП «над» с двумя типами управления.

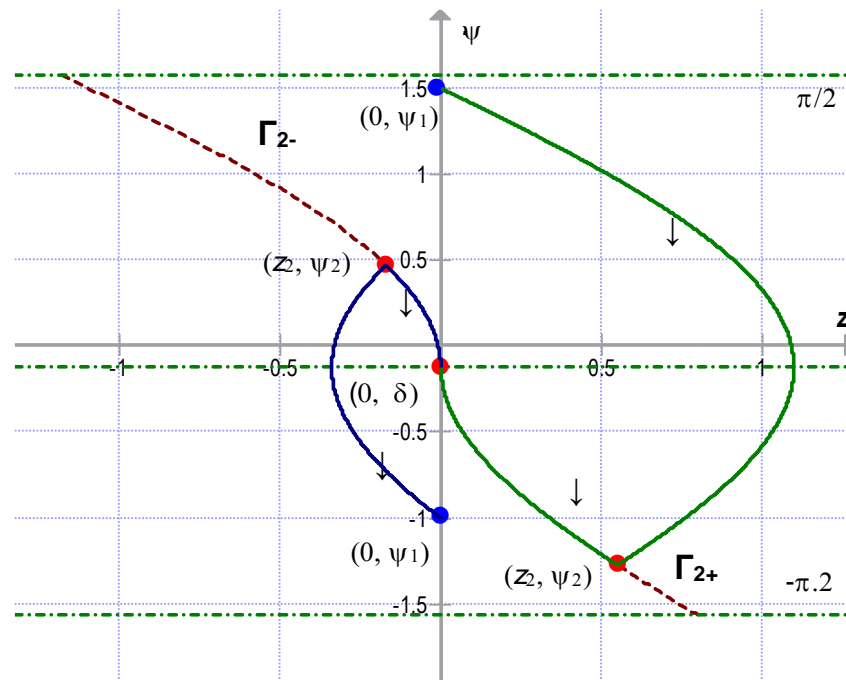


Рис. 3. Фазовые линии переключения управления и примеры движения на фазовой плоскости

Наличие свободного участка между двумя «ступенями» управления возникает, когда значение угла курса в конце первой «ступени», полученное решением уравнения (15), удовлетворяет условию

$$|\hat{\psi}_2| > \frac{\pi}{2}.$$

4. Примеры синтеза управления и моделирования движения ЛА

Рассмотрим примеры синтеза управления для смены ЛЗП при следующих параметрах модели движения: воздушная скорость летательного аппарата $V_0 = 600$ км/час; поперечная составляющая скорости ветра $U_z = 20$ м/с; максимальное значение угла крена γ_0 принято равным 45° ; обратный угол сноса на новой ЛЗП δ равен $-7^\circ = 0,12$; отношение коэффициентов подъёмной силы k_c принято 1,2. Нормированные безразмерные переменные (3) записываются:

$$\tau = 0,06 t; \quad z = 0,35 Z; \quad u_z = 0,12,$$

где переменная Z измеряется в километрах, а время t – в секундах.



Числовые значения характерных точек движения при различных условиях пролета КТП и типах управления, рассчитанные по формулам п. 2, 3, представлены в таблице 1.

Выполнено численное моделирование движения ЛА согласно формулам (2), (4) и расчётных моментов времени характерных точек траектории. На фазовой плоскости (z, ψ) рисунка 3 показаны линии переключения управления, соответствующие параметрам задачи, и фазовые траектории движения при начальных условиях таблицы 1.

Таблица 1 – Примеры синтеза управления при смене ЛЗП

Пример	Начальные условия	Тип управления	Характерные значения
1	$z_1 = 0;$ $\psi_1 = -1.$	$\{+1, -1\}$, правый и левый развороты.	Точка начала манёвра: $\psi_1 = -1; z_1 = 0; \tau_1 = 0.$ Точка переключения управления: $\psi_2 = 0,470; z_2 = -0,170; \tau_2 = 1,457.$ Точка завершения манёвра: $\psi_k = -0,12; z_k = 0; \tau_k = 2,043.$
2	$z_1 = 0;$ $\psi_1 = 1,5.$	$\{-1, +1\}$, левый и правый развороты.	Точка начала манёвра: $\psi_1 = 1,5; z_1 = 0; \tau_1 = 0.$ Точка переключения управления: $\psi_2 = -1,272; z_2 = 0,593; \tau_2 = 2,747.$ Точка завершения манёвра: $\psi_k = -0,12; z_k = 0; \tau_k = 3,889.$

На рисунке 4 показаны временные зависимости бокового отклонения $z(\tau)$ для числовых примеров №1, №2 таблицы 1. На графиках явно выделены 2 участка: нелинейное изменение при постоянном максимально допустимом угле крена до расчётного бокового отклонения переключения управления и, далее, нелинейное изменение бокового отклонения при постоянном угле крена противоположного знака (знака кривизны) до достижения новой ЛЗП.

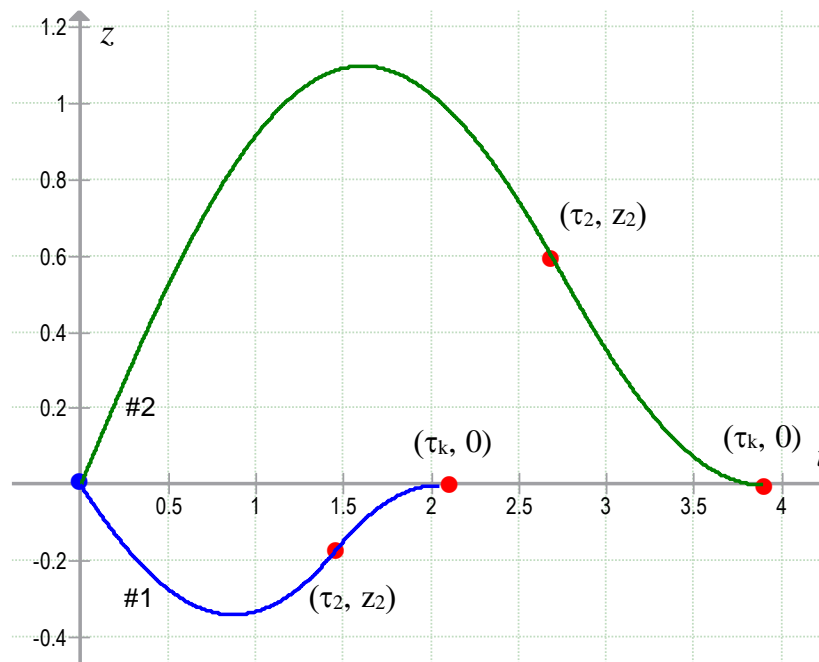


Рис. 4. Временные зависимости бокового отклонения $z(\tau)$



На рисунке 5 показаны временные зависимости относительного угла курса $\psi(\tau)$ для числовых примеров №1, №2 таблицы 1.

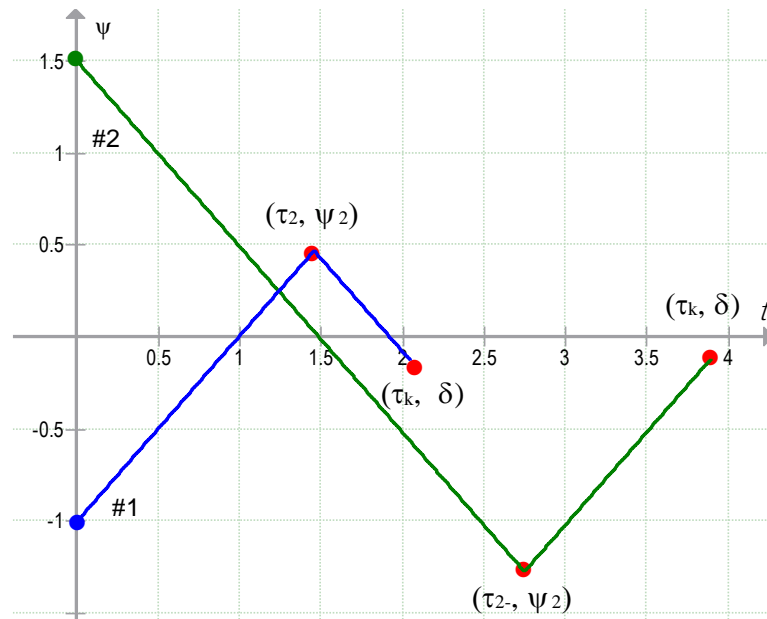


Рис. 5. Временные зависимости относительного угла курса $\psi(\tau)$

На рисунке 6 показаны траектории горизонтального движения ЛА в системе координат новой ЛЗП (Z, X). Построены траектории движения ЛА для числовых примеров №1, №2 таблицы 1.

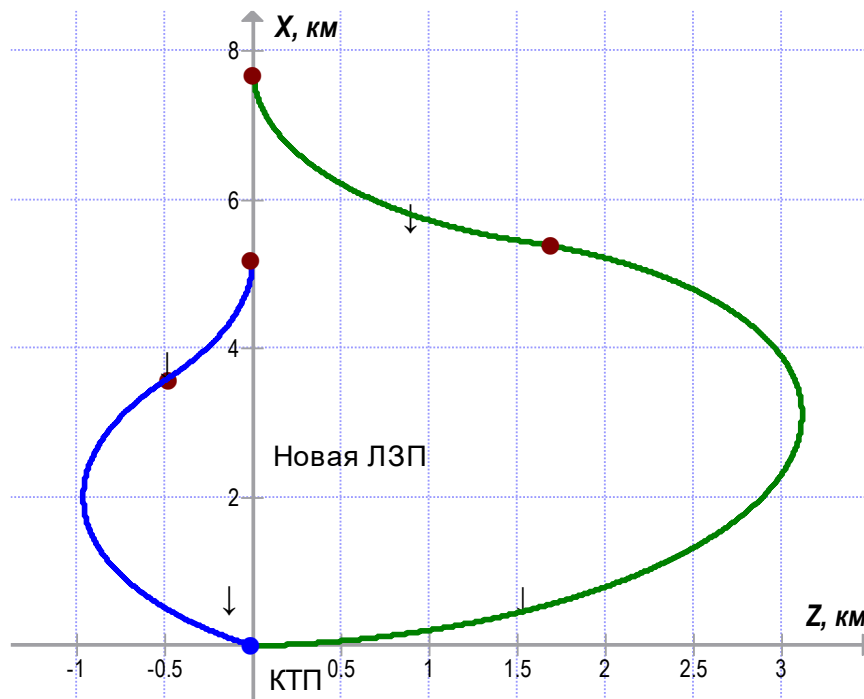


Рис. 6. Движение по горизонтальной плоскости при пролёте КТП «над»

Построение горизонтальных траекторий выполняется численным интегрированием уравнений (4) и дополнительного нормированного уравнения продольного движения



$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{k_c \sqrt{\cos \gamma}} \cos \psi + u_x, \quad (17)$$

где $x = X \frac{g}{V^2}$ – нормированное продольное расстояние ЛА вдоль новой ЛЗП; X – размерное продольное расстояние, м; $u_x = \frac{U_x}{V}$ – относительная скорость ветра вдоль по новой ЛЗП; U_x – скорость ветра вдоль по новой ЛЗП, м/с.

Для каждой траектории на рисунках 3...6 отмечены 3 характерные точки: начало манёвра, переключение полярности разворота, выключение управления на новой ЛЗП.

Заключение

Представленный метод синтеза безынерционного управления и построения соответствующих траекторий обеспечивает оптимальную с точки зрения быстродействия смену ЛЗП в режиме «над» с помощью двух «ступеней» управления по углу крена. Полученные выражения для определения интервалов начальных условий и «структуры» кусочно-постоянного управления, формулы расчёта моментов времени переключения управления, а также формулы вычисления фазовых координат характерных точек траектории обеспечивают полное решение задачи оптимального выведения ЛА на новую ЛЗП при траекторном движении.

Рассмотренная методика может служить основой для решения многокритериальных задач оптимального управления движением ЛА, в частности, при использовании других критериев качества управления [8, 9], а также при учёте инерционности управления [10].

На практике алгоритм может быть применён при разработке многометодных комплексов пилотажно-навигационного обеспечения летательных аппаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Моисеев В. С.* Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография / В. С. Моисеев. – Казань: ГБУ «Республиканский центр мониторинга качества образования» (Серия «Современная прикладная математика и информатика»), 2013. – 768 с.
2. *Кулифеев Ю. Б.* Алгоритмы автоматического управления боковым движением ударного беспилотного летательного аппарата самолётного типа на воздушном участке полёта / Ю. Б. Кулифеев, М. М. Миронова // Труды МАИ. – 2015. – № 84. – 14 с.
3. *Dubins L. E.* On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents / L. E. Dubins // Am. J. of Math. – 1957. – №79 (3). – P. 497–516.
4. *Алесов М. Б.* Оптимальное управление движением летательного аппарата при смене участка маршрута / М. Б. Алесов, А. А. Пляскина // Труды ГосНИИАС Серия: Вопросы авионики. – 2022. – №1 (56). – С. 22-36.
5. *Атанс Ж.* Оптимальное управление / Ж. Атанс, П. Л. Фалб. – М.: Машиностроение. – 1968. – 764 с.
6. Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. – М.: Высшая школа, 2003. – 614 с.
7. Динамика полёта / Мхитарян А. М. [и др.] – М.: Машиностроение, 1978. – 424 с.
8. *Бабаджанянц Л. К.* Управление по критерию расхода в механических системах / Л. К. Бабаджанянц, И. Ю. Потоцкая. – СПб.: С.-Петербург. гос. ун-т, 2003. – 137 с.



9. *Алесов М. Б.* Управление боковым траекторным движением летательного аппарата при ограничении длительности маневрирования / М. Б. Алесов // Современная наука: Актуальные проблемы теории и практики. – 2020. – №10. – С. 29-34.
10. *Алесов М. Б.* Траектории смены участка маршрута с учётом изменения воздушной скорости летательного аппарата / М. Б. Алесов, А. П. Ласточкин // Системный анализ и логистика. – 2025. – № 2(45). – С. 10-28.

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Алесов Михаил Борисович

Ведущий инженер, канд. техн. наук, доцент

АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», филиал в СПб

Россия, 195009, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Яковлева Елизавета Вадимовна

Техник

АО «Раменское приборостроительное конструкторское бюро», филиал в СПб

Россия, 195009, Санкт-Петербург, ул. Михайлова, д. 21

E-mail: evyakovleva@spb.rpkb.ru

INFORMATION ABOUT THE AUTHORS

Alesov Mikhail Borisovich

Lead engineer, PhD. Tech. Sciences, associate professor

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp

21, Mikhailova str., Saint-Petersburg, 195009, Russia

E-mail: mbalesov@spb.rpkb.ru

Yakovleva Elizaveta Vadimovna

Technician

Ramenskoye Instrument-Building Design Bureau Corp

21, Mikhailova str., Saint-Petersburg, 195009, Russia

E-mail: evyakovleva@spb.rpkb.ru

Дата поступления: 11.02.2026

Дата принятия: 17.03.2026